

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID**  
**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR**  
**DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN**



**TESIS DOCTORAL**

**CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS**  
**MEDIANTE LA DISPERSIÓN ULTRASÓNICA**

**MIGUEL ANGEL MOLERO ARMENTA**  
**INGENIERO EN ELECTRÓNICA**

**2009**

Miguel Angel Molero Armenta

Madrid, Septiembre 2009

ISBN: 978-84-692-5846-0

**DEPARTAMENTO DE SEÑALES, SISTEMAS Y RADIOCOMUNICACIONES**

**ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR  
DE INGENIEROS DE TELECOMUNICACIÓN**

**Tesis Doctoral**

**CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS MEDIANTE LA  
DISPERSIÓN ULTRASÓNICA**

**Autor:** Miguel Angel Molero Armenta  
Ingeniero en Electrónica

**Directores:**

Dr. José Javier Anaya Velayos  
Doctor en Ciencias Físicas

Dr. Miguel Angel García Izquierdo  
Doctor Ingeniero de Telecomunicación

2009



Tesis Doctoral  
CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS MEDIANTE LA DISPERSIÓN  
ULTRASÓNICA

Autor: Miguel Angel Molero Armenta

Directores:

Dr. José Javier Anaya Velayos

Dr. Miguel Angel García Izquierdo

Tribunal nombrado por el Mgfc. y Excmo. Sr. Rector de la Universidad Politécnica de Madrid, el día 12 de noviembre de 2009.

Presidente Dr. Santiago Zazo Bello  
Secretario Dra. Amparo Moragues Terrades  
Vocal Dra. Montserrat Acebes Pascual  
Vocal Dra. Teresa Sánchez Martín  
Vocal Dr. Jose Vicente Fuente Ramírez

Realizado el acto de defensa y lectura de Tesis el día 12 de noviembre de 2009, en la E.T.S. de Ingenieros de Telecomunicación, Madrid.

Calificación: Sobresaliente Cum Laude

EL PRESIDENTE

LOS VOCALES

EL SECRETARIO



A Cristina





## Agradecimientos

---

*A todas las personas que han formado parte de mi vida durante estos cuatro años tanto en el ámbito personal como profesional, ya que sin su apoyo, consejos, experiencias y dedicación no hubiera sido posible el desarrollo de este trabajo.*

*Al Dr. José Javier Anaya Velayos por su apoyo, dedicación y amistad, brindándome una superación no sólo profesional sino también personal. Igualmente al Dr. Miguel Angel García Izquierdo por manifestar siempre su confianza hacia mi trabajo y apoyarme en todo durante mi doctorado.*

*A la Dra. Margarita González Hernández, por su constante dedicación, apoyo y amistad.*

*A la Dra. Teresa Sánchez, al Dr. Carlos Fritsch y al Dr. Luis Gómez-Ullate por las innumerables charlas que forman parte de mi formación profesional, asimismo agradezco su apoyo y disponibilidad.*

*A todos los integrantes del departamento de sistemas, y del grupo de ensayos no destructivos, por los buenos momentos que hemos pasado en el Instituto de Automática Industrial.*

*Al Instituto de Automática Industrial, primero por permitirme iniciar mi formación doctoral y posteriormente por ser integrante de su plantilla.*

*Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) de México por el apoyo recibido y la confianza depositada para el desarrollo de mi trabajo de investigación doctoral.*

*Al programa de investigadores de apoyo de la Comunidad de Madrid por el contrato recibido y facilitar la finalización de esta tesis.*

*A mi familia, que a pesar de su lejanía siempre me han alentado, demostrado su cariño y entusiasmo en todos los proyectos de mi vida que he emprendido. Gracias por siempre estar conmigo.*

*A ti Cristina, por ser como eres, por formar parte de mi vida, gracias.*



## RESUMEN

---

Para determinar la durabilidad o vida útil de las construcciones de hormigón es necesario conocer la calidad y el estado de deterioro de los materiales cementicios. A nivel práctico, la caracterización más utilizada es la extracción de probetas o testigos y su análisis posterior en laboratorio. Sin embargo, la utilización de técnicas de evaluación no destructiva (END) presenta grandes ventajas sobre las técnicas habituales como poder conocer el estado de toda la estructura y permitir la monitorización en continuo de la misma.

Entre los métodos de END, los ultrasonidos han demostrado su versatilidad para la caracterización de estos materiales tanto a nivel práctico como de investigación. El presente trabajo busca ahondar en el conocimiento de la interacción que se produce entre las señales ultrasónicas que se propagan a través de este tipo de materiales y su microestructura para poder determinar tanto la calidad como su estado.

Para ello se aborda el efecto de la dispersión de las ondas ultrasónicas cuando se transmiten a través de los materiales cementicios, para establecer métodos y técnicas que permitan la caracterización de sus parámetros microestructurales tales como: la matriz cementicia, el tamaño y concentración tanto de los agregados y aire ocluido, entre otros.

Para analizar como afecta la dispersión a las ondas ultrasónicas se ha desarrollado la extensión a N-fases del modelo dinámico autoconsistente. Este modelo, a diferencia de los hasta ahora utilizados, es capaz de predecir la dependencia de la velocidad y atenuación con la frecuencia de cualquier material multi-fásico con altas concentraciones de agregados. Asimismo, se han determinado las técnicas más adecuadas de inspección y de procesamiento digital de las señales ultrasónicas para medir de manera precisa la velocidad y atenuación en función de la frecuencia. Esta metodología se ha utilizado tanto para validar experimentalmente el modelo, como para caracterizar la microestructura de materiales cementicios a partir de las señales ultrasónicas.

La validación experimental del modelo se ha realizado mediante la utilización de probetas de mortero de cemento. Para ello, se han comparado los resultados obtenidos mediante un estudio teórico y otro experimental de la influencia de los parámetros microestructurales más significativos sobre perfiles de velocidad y atenuación obtenidos por el modelo y medidos en probetas de mortero con diferente relación agregado/cemento y relación agua/cemento.

Finalmente, se exponen la eficacia y limitaciones del modelo, así como también las técnicas desarrolladas para la caracterización de la microestructura de los materiales cementicios.

## ABSTRACT

---

The durability or lifetime of concrete buildings is related to the quality and the processes leading to the deterioration of cementitious materials. The most commonly used characterization techniques use cored samples that are analyzed in the laboratory. However, the application of non-destructive testing techniques (NDT) has significant advantages in comparison with other techniques. For instance, it is possible with the NDT approach to know the status of the entire structure and to perform continuous monitoring.

Among NDT methods, ultrasonic techniques are successful in the characterization of cementitious materials. This work aims at providing further insight on the interaction between ultrasonic signals and the microstructure of such materials. Such interaction serves to determine the quality and status of concrete samples.

Toward this end, ultrasonic scattering is addressed as ultrasonic waves travelling through heterogeneous materials. Several methods and techniques allow the characterization of the microstructural parameters of heterogeneous materials such as: cement matrix, particle size and volume fraction of both aggregates and air voids, among others.

To analyze how scattering influences ultrasonic waves, an extension to N-phase of the dynamic self-consistent model has been formulated. Unlike the models commonly used, this model can predict the frequency dependence of both ultrasonic velocity and attenuation in any multiphase material with high concentrations of aggregates. This model was put in practice, and the most suitable techniques for inspection and digital signal processing were determined. The developed methodology was used for experimentally validating the model for characterizing the microstructure of cementitious materials from ultrasonic measurements.

The model was tested experimentally using mortar cement samples with different aggregate/cement ratio and water/cement ratio. Theoretical results were compared with

experimental data. Thus, microstructural parameter values were related to the velocity and attenuation profiles.

Finally, the efficiency and the limitations of the theoretical model and the experimental techniques for the characterization of the microstructure of cementitious materials are discussed.

## Índice general

---

Índice general	I
Índice de Figuras	V
Índice de tablas	IX
Símbolos	XI
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Contexto y necesidad de la investigación . . . . .	1
1.2. Caracterización ultrasónica de materiales cementicios . . . . .	4
1.3. Objetivos . . . . .	6
1.4. Estructura de la tesis . . . . .	7
<b>2. CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LOS MATERIALES CEMENTICIOS</b>	<b>9</b>
2.1. Introducción . . . . .	9
2.2. Microestructura de los materiales cementicios . . . . .	11
2.2.1. Pasta de Cemento . . . . .	12
2.2.2. Estructura porosa . . . . .	13
2.2.3. Agregados . . . . .	15
2.3. Relación microestructura-propiedades de los materiales cementicios . . . . .	16
<b>3. FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS MECÁNICAS EN MATERIALES NO HOMOGÉNEOS</b>	<b>19</b>
3.1. Introducción . . . . .	19
3.2. Propagación de ondas en medios continuos . . . . .	20
3.2.1. Esfuerzo, deformación y ley de Hooke . . . . .	20
3.2.2. Ecuaciones de Navier . . . . .	25
3.2.3. Propagación de ondas en medios homogéneos e isotrópicos . . . . .	26

3.2.3.1. Velocidad de Fase y Grupo . . . . .	27
3.3. Propagación de ondas en medios no homogéneos . . . . .	29
3.3.1. Homogeneización . . . . .	29
3.3.1.1. Tipos de homogeneización . . . . .	30
3.3.2. Concepto de Dispersión . . . . .	31
3.3.3. Número de onda complejo . . . . .	33
3.3.4. Atenuación dependiente de la frecuencia . . . . .	33
<b>4. MODELOS N-FÁSICOS DE DISPERSIÓN MÚLTIPLE PARA LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS</b>	<b>37</b>
4.1. Introducción . . . . .	37
4.2. Modelo de Waterman-Truell . . . . .	40
4.2.1. Dispersión de ondas longitudinales por una inclusión esférica elástica sólida . . . . .	42
4.2.2. Dispersión de ondas longitudinales por inclusiones esféricas de fluido y cavidades de aire . . . . .	50
4.2.3. Aproximación del modelo de Waterman-Truell en el límite estático . .	50
4.3. Modelo Dinámico Generalizado Autoconsistente . . . . .	53
4.4. Formulación del Modelo Dinámico Autoconsistente N-Fásico . . . . .	54
4.4.1. Dispersión de ondas longitudinales por inclusiones esféricas elásticas sólidas en un medio efectivo . . . . .	56
4.4.2. Dispersión de las ondas longitudinales por inclusiones esféricas de fluido y cavidades en un medio efectivo . . . . .	61
4.4.3. Aproximación del Modelo Dinámico Autoconsistente en el límite estático	62
4.4.4. Criterio de validez del Modelo Dinámico Autoconsistente . . . . .	63
4.5. Estudio teórico de la dispersión en materiales cementicios . . . . .	66
4.5.1. Caso I. Pasta de cemento + inclusiones esféricas elásticas . . . . .	67
4.5.1.1. Influencia del tamaño de las inclusiones elásticas . . . . .	67
4.5.1.2. Influencia de la fracción de volumen de las inclusiones elásticas	69
4.5.1.3. Influencia de una distribución de inclusiones elásticas . . . .	70
4.5.2. Caso II. Pasta de Cemento + cavidades . . . . .	72
4.5.2.1. Influencia del tamaño de las cavidades . . . . .	73
4.5.2.2. Influencia de la fracción de volumen de las cavidades . . . .	74
4.5.2.3. Influencia de una distribución de cavidades . . . . .	74
4.5.3. Caso III. Pasta de Cemento + inclusiones elásticas + cavidades . . . .	75



4.6. Resumen . . . . .	78
<b>5. TÉCNICA DE INSPECCIÓN POR TRANSMISIÓN Y PROCESADO DE SEÑALES ULTRASÓNICAS</b>	<b>79</b>
5.1. Introducción . . . . .	79
5.2. Inspección ultrasónica por transmisión . . . . .	80
5.2.1. Sistema Ultrasónico de emisión-recepción . . . . .	82
5.3. Medición de la velocidad ultrasónica . . . . .	84
5.3.1. Técnicas de excitación . . . . .	85
5.3.2. Métodos para la determinación del tiempo de vuelo . . . . .	90
5.3.2.1. Detección de la envolvente y método de correlación cruzada	91
5.3.2.2. Método de detección de cruces por cero . . . . .	93
5.3.3. Medición de la Velocidad Transversal . . . . .	95
5.4. Determinación de la Atenuación Ultrasónica . . . . .	97
5.4.1. Corrección por difracción . . . . .	99
5.4.2. Mecanismos de absorción y dispersión sobre las medidas de atenuación total . . . . .	102
5.4.3. Técnicas de excitación . . . . .	102
5.4.3.1. Técnica de barrido lineal de frecuencia . . . . .	103
5.5. Resumen . . . . .	108
<b>6. CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS MEDIANTE LA VELOCIDAD Y ATENUACIÓN ULTRASÓNICA</b>	<b>109</b>
6.1. Introducción . . . . .	109
6.2. Estudio experimental de la dispersión ultrasónica en materiales cementicios .	110
6.2.1. Descripción de las probetas . . . . .	110
6.2.2. Medidas de la velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia .	113
6.2.3. Heterogeneidad de la probetas . . . . .	113
6.2.4. Discusión sobre las predicciones obtenidas por el modelo dinámico autoconsistente N-fásico . . . . .	116
6.3. Validación experimental del modelo dinámico autoconsistente N-fásico en materiales cementicios . . . . .	119
6.3.1. Estimación para probetas de mortero con microesferas de vidrio . . . .	120
6.3.2. Estimación para probetas de mortero con áridos . . . . .	123
6.3.3. Influencia de la distribución del tamaño de los agregados . . . . .	125
6.3.4. Influencia de la distribución del tamaño del aire ocluido . . . . .	127

6.3.5. Rango de aplicación del modelo dinámico autoconsistente N-fásico . . .	128
6.4. Estimación de parámetros microestructurales de materiales cementicios mediante el modelo dinámico autoconsistente N-fásico . . . . .	130
6.4.1. Estimación de las propiedades de la matriz cementicia . . . . .	131
6.4.2. Estimación de propiedades del mortero: matriz cementicia y aire ocluido	133
6.4.2.1. Comprobación experimental de la estimación del aire ocluido	137
6.4.3. Estimación del tamaño y concentración de agregados . . . . .	142
6.5. Observaciones Finales . . . . .	144
<b>7. CONCLUSIONES</b>	<b>145</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>151</b>
<b>A. MODELOS CLÁSICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES COM- PUESTOS</b>	<b>153</b>
A.1. Introducción . . . . .	153
A.2. Fronteras de Hashin-Shtrikman . . . . .	154
A.3. Modelo de Kuster-Toksöz . . . . .	155
A.4. Método Generalizado Autoconsistente Estático . . . . .	156
<b>B. MÉTODO N-FÁSICO AUTOCONSISTENTE DE SABINA-WILLIS</b>	<b>159</b>
B.1. Formulación . . . . .	159
B.2. Expresiones del método N-fásico autoconsistente . . . . .	161
<b>C. CARACTERIZACIÓN DE LA POROSIDAD DE LAS MUESTRAS</b>	<b>163</b>
C.1. Ensayo de porosidad accesible al agua . . . . .	163
<b>REFERENCIAS</b>	<b>167</b>

## Índice de Figuras

2.1. Niveles Microestructurales de los materiales cementicios (Segura, 2008). . . . .	12
2.2. Principales parámetros que influyen en el módulo de elasticidad de los materiales cementicios. . . . .	16
3.1. Curva de Dispersión. . . . .	32
3.2. Tipos de Energía Dispersada. . . . .	32
3.3. Dependencia de la atenuación con respecto a la frecuencia y el tamaño del dispersor. . . . .	34
4.1. Esquema de las ondas reflejadas y transmitidas debido a una inclusión esférica embebida en un medio homogéneo para el caso de una onda longitudinal incidente. . . . .	43
4.2. Esquema de: a) modelo generalizado autoconsistente (Yang y Mal, 1994) y b) Extensión N-fásica del modelo dinámico autoconsistente. . . . .	54
4.3. Esquema de las ondas reflejadas y transmitidas con respecto a un medio efectivo compuesto que embebe una matriz homogénea y está a su vez contiene una inclusión elástica, para el caso de una onda longitudinal incidente. . . . .	57
4.4. Criterio de Validación para los modelos WT y MDAC con respecto al factor $k_1 a$ . . . . .	64
4.5. Gráficos de velocidad y atenuación con respecto a la concentración de inclusiones obtenidos por el modelo WT y el modelo DAC. . . . .	65
4.6. Comparativa de los módulos elásticos obtenidos por el modelo DAC en el límite estático y con las fronteras de Hashin-Shtrikman con respecto a la concentración de inclusiones: a) Módulo Volumétrico, b) Módulo Transversal y c) Módulo de Young. . . . .	66
4.7. Gráficos de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia a distintos tamaños de inclusiones y fracción de volumen constante $\phi = 15\%$ : a) y b) para una matriz de cemento con $(w/c)=0.35$ , c) y d) para una matriz de cemento con $(w/c)=0.40$ . . . . .	68
4.8. Gráficos de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia a distintas fracciones de volumen y radio de inclusiones constante $a = 0.5[\text{mm}]$ : a) y b) para una matriz de cemento con $(w/c)=0.35$ . . . . .	70
4.9. Gráficos de velocidad y atenuación debido a un tamaño de inclusión $a$ con $\phi$ , y con respecto a dos concentraciones de inclusión $\phi/2$ y $\phi/2$ con tamaño $a$ . . . . .	71
4.10. Gráficos de a), d) velocidad y b), e) atenuación debido a c) y f) distintas distribuciones de tamaño: Tamaño medio, distribución uniforme, distribución gaussiana y distribución triangular. . . . .	72
4.11. Influencia del tamaño de las cavidades en una matriz de cemento con $(w/c)=0.35$ y $\phi_v = 2\%$ sobre: a) perfiles de velocidad, y b) perfiles atenuación. . . . .	73
4.12. Influencia de la concentración de cavidades en una matriz de cemento con $(w/c):0.35$ y tamaño $a_v = 1 [\text{mm}]$ sobre a) perfiles de velocidad y b) atenuación. . . . .	74

4.13. Gráficos de velocidad y atenuación en una matriz de cemento con $(w/c)=0.35$ , para distintos tipos de distribuciones de cavidades. . . . .	75
4.14. Gráficos de a) velocidad y b) atenuación considerando la interacción de inclusiones elásticas de tamaño $a=0.5$ [mm] y $\phi=50\%$ (trazo rojo) y aire ocluido de tamaño $a_v=0.5$ [mm] y $\phi_v=5\%$ (trazo verde) sobre la matriz y en conjunto (trazo azul). . . . .	76
4.15. Gráficos de a) velocidad y b) atenuación, para distintos c) tipos de distribución de tamaños de inclusiones elásticas a $\phi=50\%$ y con una d) distribución gaussiana de aire ocluido con una concentración total de $\phi_v=5\%$ constante para cada uno de los casos. . . . .	77
4.16. Gráficos de a) velocidad y b) atenuación, para c) distintas distribuciones de tamaño de cavidades con un único tamaño de inclusión elástica de tamaño $a=1$ [mm] con $\phi=50\%$ . . . . .	77
5.1. Fotografía del a) sistema de barrido automático (piscina rellena de agua), b) Probetas de pasta de cemento y mortero empleadas en la inspección, y c) Posición de los transductores con respecto a las probetas. . . . .	82
5.2. Configuración del sistema de inspección por transmisión en inmersión. . . . .	83
5.3. Ejemplo de obtención de $\Delta\varphi$ para una muestra de mortero con concentración de agregados $\phi=13\%$ y tamaño $a=1$ [mm]. a), c), e) pulso recibido en agua y su respectivo espectro de amplitud $X_w(\omega)$ y fase $\varphi_w(\omega)$ , respectivamente; b), d), f) pulso propagado en el material y su respectivo espectro de amplitud $X_s(\omega)$ y fase $\varphi_s(\omega)$ , respectivamente; g) Diferencia de fases $\Delta\varphi$ . . . . .	86
5.4. Ejemplo de obtención de $\Delta\varphi$ para una muestra de mortero con concentración de agregados $\phi=38\%$ y tamaño $a=1$ [mm]. a), c), e) pulso recibido en agua y su respectivo espectro de amplitud $X_w(\omega)$ y fase $\varphi_w(\omega)$ , respectivamente; b), d), f) pulso propagado en el material y su respectivo espectro de amplitud $X_s(\omega)$ y fase $\varphi_s(\omega)$ , respectivamente; g) Diferencia de fases $\Delta\varphi$ . . . . .	87
5.5. Señales temporales y su respuesta en frecuencia de diferentes pulsos de banda angosta emitidos a: a), b) 0.5MHz, c), d) 1MHz y e), f) 2MHz. . . . .	88
5.6. Pulsos eléctricos emitidos y ultrasónicos recibidos representados como una imagen (50 filas, cada una representa un pulso generado a una frecuencia de emisión); a) imagen de los pulsos eléctricos, y las imágenes de los pulsos ultrasónicos propagados en: b) agua, y en muestras de mortero tamaño de agregados $a=1$ [mm] y concentración de éstos de c) $\phi=13\%$ y d) $\phi=38\%$ . . . . .	89
5.7. Detección de la envolvente de a) un pulso ultrasónico emitido a 2.5MHz (señal de referencia), y de los pulsos recibidos al viajar por muestras de mortero con tamaño de agregados de $a=1$ [mm] a concentración de dispersores de b) $\phi=13.4\%$ y c) $\phi=38.1\%$ . . . . .	92
5.8. Ejemplo de la detección de cruces por cero. . . . .	94
5.9. Comparativa entre la técnica de la correlación cruzada y la detección de cruce por cero para la determinación de la velocidad de fase dependiente de la frecuencia. Medición de la velocidad en: a) agua, b) mortero con $\phi=13\%$ y $a=1$ [mm] de microesferas de vidrio y c) mortero con $\phi=38\%$ y $a=1$ [mm] de microesferas de vidrio. . . . .	94
5.10. Configuración para la medición de las ondas transversales. . . . .	96
5.11. Ondas longitudinal y transversal transmitidas. Incidencia oblicua. . . . .	97
5.12. Campo Acústico de un transductor (Panametrics, 2006). a) Esquema de sus regiones y b) apertura del campo. . . . .	99

5.13. Apertura y campo acústico de un haz ultrasónico en onda continua que viaja en agua a lo largo del eje $z$ . a) variación de la apertura del campo acústico a distintas frecuencias de emisión en el agua. Campo acústico del haz con frecuencias de emisión: b) 0.5 MHz y c) 2.5 MHz. Los valores están dados en decibelios y el cero de los ejes $x, y$ representan el punto central de la probeta con anchura de 40[mm]. . . . .	100
5.14. Influencia del coeficiente de transmisión y corrección de difracción sobre la atenuación aparente. . . .	101
5.15. Señales de barrido lineal de frecuencia: a), b) y c) señal temporal en agua, su espectro y representación tiempo-frecuencia, respectivamente, d), e) y f) señal temporal que se propagó en una muestra de mortero, su espectro y representación tiempo-frecuencia. Los gráficos correspondientes a la representación tiempo-frecuencia fueron obtenidos mediante la Transformada de Fourier de tiempo corto. En los espectrogramas se observa tanto en el inicio como en el final de las señales “chirp”, componentes de banda ancha que son causadas por el inicio y el fin de la oscilación del transductor de 5MHz. . . . .	104
5.16. Ejemplo del procedimiento tiempo-frecuencia propuesto: a) señal temporal propagada en agua $x_w$ , b) señal temporal que se propaga en el espécimen $x_s$ , c) Representación tiempo-frecuencia $SPWV_w(t, \omega)$ de $x_w$ , d) $SPWV_s(t, \omega)$ de $x_s$ , e) y f) $\widehat{SPWV}_x(t, \omega)$ de $x_w$ y $x_s$ , respectivamente para $\eta$ igual a la mitad de la máxima energía, y g) Estimación de la atenuación aparente total mediante la obtención de los marginales de frecuencia (trazo continuo azul) y a partir de la Transformada de Fourier discreta (trazo discontinuo rojo). . . . .	106
5.17. Comparativa entre técnicas para la determinación de la atenuación aparente total. . . . .	107
6.1. Influencia del coeficiente de transmisión y corrección de difracción sobre las variaciones de la atenuación aparente promedio (diez medidas). La desviación estándar representada por la barras verticales (color rojo) se refiere a las variaciones en la medida de la probeta de mortero M100S1 con $(w/c)=0.35$ . . . . .	113
6.2. Mapa de velocidades de las probetas de mortero con microesferas de vidrio: a) $(w/c)=0.35$ , y b) $(w/c)=0.40$ . . . . .	114
6.3. Mapa de atenuación en escala lineal y en porcentaje de las probetas de mortero con microesferas de vidrio: a) $(w/c)=0.35$ , y b) $(w/c)=0.40$ . . . . .	115
6.4. Curvas promedio de velocidad y atenuación experimentales, de las probetas de mortero con microesferas de vidrio para a), b) $(w/c)=0.35$ y c), d) $(w/c)=0.40$ . . . . .	117
6.5. Curvas promedio de velocidad y atenuación experimentales de las probetas de mortero con áridos. . .	118
6.6. Curvas promedio de velocidad y atenuación experimentales y teóricas obtenidas con el modelo dinámico autoconsistente N-fásico para a), b) $(w/c)=0.35$ y c), d) $(w/c)=0.40$ . Las curvas teóricas están representadas por las líneas continuas. . . . .	121
6.7. Curvas promedio de velocidad y atenuación experimentales y teóricas obtenidas por el modelo dinámico autoconsistente N-fásico para las probetas de mortero con áridos. Las curvas teóricas están representadas por las líneas continuas. . . . .	123
6.8. Distribución relativa del tamaño de agregados de las muestras de mortero con áridos. . . . .	125
6.9. Influencia de una distribución del tamaño de agregados sobre perfiles de velocidad y atenuación experimentales y teóricos. . . . .	126
6.10. Influencia de la distribución del aire ocluido sobre perfiles de velocidad y atenuación experimental y teóricos. Se ha empleado la muestra de mortero M300GOW46. . . . .	127

6.11. Comparativa de los gráficos de velocidad y atenuación con respecto a la concentración de agregados obtenidos experimentalmente y mediante los modelos de WT N-fásico y DAC N-fásico. Las medidas de velocidad y atenuación corresponden a la frecuencia de 1MHz. En a) y b) se presentan las variaciones de velocidad y atenuación con respecto a las probetas M025S2, M050S2 y M050S2 del grupo I, mientras que en c) y d) las medidas experimentales y teóricas corresponden a las probetas de mortero con áridos, M100G038, M200G0W45 y M300G0W46. . . . .	129
6.12. Curvas de velocidad experimental, (w/c):0.40, y teórica considerando a la pasta de cemento como un material bifásico compuesto de una matriz cementicia y aire ocluido. . . . .	132
6.13. Comparativa de la estimación de la densidad aparente entre los procedimientos propuestos y medidas de ensayos destructivos para las probetas de mortero con microesferas de vidrio (w/c):0.35. . . . .	135
6.14. Comparativa de la estimación de la densidad aparente entre el procedimiento I y medidas de ensayos destructivos para las probetas de mortero con áridos. . . . .	136
6.15. Imágenes de un corte de una probeta de mortero con microesferas de vidrio, M050S1: a) Imagen completa capturada y b) Región seleccionada para aplicar el análisis de imagen. . . . .	138
6.16. Segmentación de las imágenes: a) Imagen RGB de un corte de probeta M300G0W46, b) imagen segmentada. . . . .	139
6.17. Comparativa entre procedimientos de estimación del aire ocluido para las probetas de mortero con microesferas de vidrio con (w/c)=0.35. a) Estimaciones del tamaño del aire ocluido y b) Fracción de volumen del aire ocluido. . . . .	140
6.18. Comparativa entre procedimientos para la estimación del aire ocluido para las probetas de mortero con áridos. a) Estimaciones del tamaño del aire ocluido y b) Fracción de volumen del aire ocluido. . .	142
A.1. Modelo geométrico de tres fases, medio efectivo-matriz-inclusión. . . . .	157

## Índice de tablas

---

1.1. Relación entre medidas de velocidad longitudinal y la calidad del hormigón. . . . .	3
2.1. Proporciones típicas de materiales en mezclas de hormigón con diferentes resistencias (Mehta y Monteiro, 2006). . . . .	10
2.2. Clasificación de los poros en la pasta de cemento hidratado. . . . .	14
3.1. Relación entre pares de constantes elásticas para materiales isótropos y homogéneos. . . . .	24
3.2. Relaciones entre velocidades de propagación y las combinaciones de pares más usuales de los módulos elásticos. . . . .	27
3.3. Obtención de los módulos elásticos a partir de medidas de velocidad. . . . .	27
4.1. Armónicos esféricos para una inclusión elástica esférica. . . . .	48
4.2. Argumentos de intercambio para las matrices <b>P</b> y <b>Q</b> debido a una inclusión esférica elástica. . . . .	49
4.3. Argumentos de intercambio para las matrices <b>P</b> y <b>Q</b> considerando el esquema del medio efectivo mostrado en la Figura 4.3. . . . .	58
4.4. Propiedades de pastas de cemento, inclusiones elásticas y cavidades. . . . .	67
6.1. Proporción en peso de la relación agregado/cemento ( <i>s/c</i> ) y agua/cemento ( <i>w/c</i> ) de las probetas de pasta de cemento y mortero de microesferas de vidrio y áridos. . . . .	112
6.2. Tamaño y fracción volumétrica de agregados para las muestras de mortero con microesferas de vidrio (Conjunto 1) y para las muestras de mortero con áridos (Conjunto 2). . . . .	112
6.3. Estimación de los parámetros microestructurales para las probetas de mortero con microesferas de vidrio ( <i>w/c</i> )=0.35, mediante el procesos de análisis-síntesis. . . . .	122
6.4. Estimación de los parámetros microestructurales para las probetas de mortero con microesferas de vidrio ( <i>w/c</i> )=0.40, mediante el procesos de análisis-síntesis. . . . .	122
6.5. Estimación de los parámetros microestructurales para las probetas de mortero con áridos, mediante el procesos de análisis-síntesis. . . . .	124
6.6. Estimación de parámetros de la matriz cementicia con respecto las pastas de cemento, ( <i>w/c</i> )=0.35 y 0.40. . . . .	133
6.7. Estimación del aire ocluido para las probetas de mortero con microesferas de vidrio ( <i>w/c</i> )=0.35. . .	134
6.8. Medición y estimación del aire ocluido en cortes correspondientes a las probetas de mortero con microesferas de vidrio ( <i>w/c</i> )=0.35. . . . .	139
6.9. Medición y estimación del aire ocluido en cortes correspondientes a las probetas de mortero con áridos.	141

6.10. Estimación del tamaño y fracción de volumen de los agregados y del aire ocluido con respecto al primer caso de estudio. . . . .	143
6.11. Estimación del tamaño y fracción de volumen de los agregados y del aire ocluido con respecto al segundo caso de estudio. . . . .	143
A.1. Modelos clásicos bifásicos. . . . .	154
C.1. Ensayo de porosidad conectada de muestras de mortero con microesferas de vidrio ( $w/c$ )=0.35. . . .	164
C.2. Ensayo de porosidad conectada de muestras de mortero con microesferas de vidrio ( $w/c$ )=0.40. . . .	164
C.3. Ensayo de porosidad conectada de muestras de mortero con granos de arena. . . . .	165



# Símbolos

$   $	Magnitud	$\Phi_{sc}^{(e)}$	Potencial longitudinal dispersado por la matriz dentro de un medio efectivo
$\langle \rangle$	Cantidad Efectiva	$\Phi_{sc}^{(1)}$	Potencial longitudinal dispersado por la matriz
$\alpha$	Atenuación total	$\Phi_t^{(1)}$	Potencial longitudinal transmitido hacia la matriz
$\alpha_{ab}$	Atenuación por absorción	$\Phi_t^{(2)}$	Potencial longitudinal transmitido hacia la inclusión
$\alpha_L$	Atenuación longitudinal	$\Psi$	Potencial vector de onda transversal
$\alpha_{tot}$	Atenuación total	$a$	Radio de inclusión
$\alpha_T$	Atenuación transversal	$a_{min}$	Radio mínimo
$\alpha_{sc}$	Atenuación por dispersión	$a_v$	Radio de cavidades
$\gamma^{sca}$	Sección transversal de dispersión	$\bar{a}_w$	Radio medio ponderado
$\delta_{mn}$	Delta de Kronecker	$\bar{a}_{max}$	Radio medio máximo
$\phi$	Fracción de volumen	$b$	Radio exterior de la matriz (medio efectivo)
$\phi_v$	Fracción de volumen de cavidades	$b_A$	Ordenada al origen de la recta de $\alpha_{ab}$
$\bar{\phi}_w$	Fracción de volumen media ponderada	$b_{A_p}$	Ordenada al origen de la recta de $\alpha_{ab}$ (pastas de cemento)
$\varphi$	Fase	$d$	Espesor
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformación	$f$	Frecuencia
$\kappa$	Número de onda transversal	$f_s$	Frecuencia de muestreo
$\lambda$	Constante de Lamé	$f(0)$	Amplitud de dispersión transmitida para ondas long.
$\lambda$	Longitud de Onda	$f(\pi)$	Amplitud de dispersión reflejada para ondas long.
$\mu$	Módulo transversal o de rigidez	$g(0)$	Amplitud de dispersión transmitida para ondas trans.
$\rho$	Densidad	$g(\pi)$	Amplitud de dispersión reflejada para ondas trans.
$\sigma_{ij}$	Tensor de esfuerzo	$h_n$	Función esférica de Hankel de primera especie y orden $n$
$\bar{\sigma}_w$	Desviación del radio medio ponderado	$i$	Unidad imaginaria, subíndice
$\bar{\sigma}_{a_{max}}$	Desviación del radio medio máximo	$j$	Subíndice
$\nu$	Coefficiente de Poisson	$j_n$	Función esférica de Bessel de primera especie y orden $n$
$\omega$	Frecuencia angular	$k$	Número de onda longitudinal
$\theta$	Ángulo	$m_A$	Pendiente de la recta de $\alpha_{ab}$
$\theta_D$	Dilatación	$m_{A_p}$	Pendiente de la recta de $\alpha_{ab}$ (pastas de cemento)
$\Phi$	Potencial escalar de onda longitudinal	$n_0$	Número de dispersores por unidad de volumen
$\Phi_{inc}^{(e)}$	Potencial longitudinal incidente en el medio efectivo		

$p_h$	Presión hidrostática	$\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \dots, \mathcal{H}_n$	Coefficientes de dispersión
$r$	Radio, subíndice	$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier
$\mathbf{r}$	Vector de posición	$\mathbb{M}$	Masa
$t$	Tiempo	$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$	Argumentos de la función de intercambio
$u, v, w$	Componentes del vector de desplazamiento	$\mathcal{Z}_n$	Función de intercambio
$\mathbf{u}$	Vector de desplazamiento	$\mathbb{T}$	Operador lineal
$C_{ijkl}$	Tensor de constantes elásticas	$\mathbb{V}$	Volumen
$E$	Módulo de Young	$\Delta V$	Resolución de la medida de velocidad
$\text{Im}$	Parte Imaginaria de un número complejo	$\Delta t$	Resolución de la medida del tiempo de vuelo
$K$	Módulo volumétrico	$\nabla$	Gradiente
$P_n$	Polinomios de Legendre de orden $n$	$\nabla^2$	Laplaciano
$\mathbf{P}, \mathbf{Q}$	Matrices de intercambio		
$\text{Re}$	Parte real de un número complejo	ED	Ensayos destructivos
$T$	Coefficiente de Transmisión	END	Ensayos no destructivos
$T_s$	Tasa de muestreo	(s/c)	Relación agregado/cemento
$V_\varphi$	Velocidad de fase genérica	(w/c)	Relación agua/cemento
$V_{fp}$	Velocidad de frente de pulsos		
$V_L$	Velocidad de fase longitudinal		
$V_T$	Velocidad de fase transversal		
$V_g$	Velocidad de Grupo		

---

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

---

*En este primer capítulo se describe el ámbito general y necesidad de la investigación de la presente tesis. Se introduce la problemática de la caracterización ultrasónica de materiales cementicios para la determinación de sus propiedades y características microestructurales. Asimismo, se establecen los objetivos y la estructura de la tesis.*

### **1.1. Contexto y necesidad de la investigación**

La utilización del hormigón en la construcción de edificaciones e infraestructuras de transporte y comunicaciones ha demostrado su versatilidad e indiscutibles ventajas, por lo que es considerado en la actualidad el material de construcción por excelencia. Este material permite construir piezas de cualquier forma por complicada que sea debido al carácter plástico que posee cuando se encuentra en estado fresco, su resistencia a la compresión es apreciable y aunque posea resistencia a tracción baja permite aumentarla valiéndose del acero, como son los casos del hormigón armado y pretensado. El hormigón está constituido por cemento y materiales muy extendidos en la naturaleza como son los áridos y el agua. Sin embargo, aunque este material es estable y duradero, en los últimos años se ha incrementado el número de estructuras con síntomas de deterioro prematuro por acción de diferentes procesos y ambientes agresivos físicos (erosión, hielo-deshielo, etc) y químicos (ataque por ácidos, sulfatos alcalinos, etc.). Estos procesos de deterioro producen fracturas, grietas o fisuras que debilitan y afectan a las estructuras. En consecuencia, es de suma importancia, la descripción de los mecanismos físico-químicos implicados en los procesos de deterioro y el establecimiento de procedimientos para evaluar la durabilidad y la calidad de los materiales de construcción. De este modo, es posible minimizar costes en los procesos de mantenimiento y reparación mediante una anticipada y oportuna intervención. Con este fin, numerosos grupos de investigación interdisciplinarios están realizando estudios en los ámbitos de la caracterización de materiales de construcción y en la monitorización para el mantenimiento y reparación predictiva de las infraestructuras. Los trabajos de investigación

al respecto se centran en el estudio de las relaciones entre las propiedades físicas y mecánicas de los *materiales cementicios* con la durabilidad y calidad de los mismos. No obstante, la heterogeneidad en la microestructura de los materiales cementicios, así como también la complejidad en cuanto a la descripción de los procesos de fraguado y endurecimiento de este material, hacen que todavía sea una campo de investigación en continuo avance y desarrollo.

La calidad del hormigón, normalmente, es determinada por su resistencia a la compresión y la homogeneidad requerida con respecto a la distribución de sus constituyentes. Esta calidad depende de varios factores, como son: el tipo y proporción de cemento incluido en la mezcla, propiedades de sus agregados, la relación agua/cemento ( $w/c$ ), la condición de fraguado, el proceso de endurecimiento y curado, la edad del hormigón y el grado de humedad, entre otros. En el estudio de la durabilidad en materiales cementicios están involucrados fundamentalmente las condiciones ambientales y agentes agresivos a los que van a estar expuestos, y la microestructura resultante de los materiales mezclados. La durabilidad del hormigón está relacionada con la porosidad abierta del mismo, así como también la distribución y el tamaño de sus poros, ya que los agentes agresivos (líquidos, sustancias disueltas, gases, etc) son transportados a través de la estructura porosa y/o fisuras del material.

Para evaluar los parámetros anteriormente descritos, se emplean dos tipos de ensayos, los ensayos destructivos (ED) y los ensayos no destructivos (END). Los ED en materiales cementicios han permitido, con resultados óptimos, la evaluación de la resistencia a la compresión, durabilidad, relaciones entre las propiedades de sus constituyentes, porosidad y en general la calidad de los materiales. Sin embargo, estos ensayos tienen la desventaja de necesitar una extracción de muestra del elemento a inspeccionar por lo que no es posible la aplicación del procedimiento a todos los componentes de una estructura. Los END pueden proporcionar resultados similares a los ED pero con las ventajas de poder realizar una inspección completa y realizar los ensayos *in situ*.

Los ensayos por ultrasonidos es una de las técnicas END más utilizadas para la caracterización de materiales por tener un bajo coste y requerir menor infraestructura en comparación con otros métodos de inspección (penetración líquida, partículas magnéticas, ensayos electromagnéticos, radiografía, etc.). Una de las ventajas más importantes al utilizar las técnicas de ultrasonidos es que no son nocivas para el operario, como el uso de otros métodos que emplean radiaciones de rayos X, sustancias tóxicas o corrientes eléctricas

de alto amperaje. Además, los ensayos por ultrasonidos son idóneos para la evaluación automatizada de materiales por medio de sistemas de diagnóstico durante un proceso de manufactura obteniendo información con respecto a la posición, forma y tamaño de uno o múltiples objetos como pueden ser las inclusiones, fallas, fisuras o defectos.

La aplicación de los ultrasonidos sobre compuestos de cemento, se viene desarrollando desde hace unos 50 años. Aunque existen aplicaciones prácticas e incluso sistemas comerciales basados en el uso del ultrasonido, la complejidad y casuística del material bajo análisis, dificultan enormemente definir criterios concluyentes a aplicar sobre las medidas obtenidas. Por ejemplo, en la Tabla 1.1 se muestra una clasificación de la calidad del hormigón, en función de la velocidad de propagación de una onda ultrasónica longitudinal a través de este tipo de material para una probeta cilíndrica de 15 [cm] de diámetro y 30 [cm] de longitud (Tobio, 1967). Sin embargo, esta clasificación es eminentemente cualitativa ya que no tiene en cuenta las distintas clases de hormigones, ni proporciona una relación entre el tipo, cantidad y propiedades de los agregados, así como otras características microestructurales del material como son las propiedades de la matriz y la porosidad.

Calidad	Velocidad longitudinal [m/s]	Resistencia a la compresión aproximada [Kg/cm <sup>2</sup> ]
Muy pobre	< 2000	≤ 40
Pobre	2000 a 3000	≤ 100
Ligeramente bueno	3000 a 3500	≤ 250
Bueno	3500 a 4000	≤ 400
Muy bueno	4000 a 4500	≤ 400
Excelente	> 4500	> 400

**Tabla 1.1.** Relación entre medidas de velocidad longitudinal y la calidad del hormigón.

*Será necesario conocer la propagación de las ondas ultrasónicas en los materiales cementicios para una adecuada descripción y relación entre los ultrasonidos y las propiedades microestructurales de estos materiales. Esta problemática es la motivación principal de este trabajo de investigación.*

## 1.2. Caracterización ultrasónica de materiales cementicios

La caracterización ultrasónica de los materiales cementicios se realiza, principalmente, mediante la medida, el tratamiento y el procesado de parámetros que permitan estudiar las variaciones de las propiedades físicas de las ondas ultrasónicas cuando atraviesan o se reflejan sobre el material objeto de la caracterización.

La medida de la velocidad de propagación de las ondas ultrasónicas es el método dentro de los END más empleado para la caracterización de propiedades mecánicas y físicas en materiales cementicios ya que este parámetro está relacionado directamente con las constantes elásticas y la densidad del material. Asimismo, diversos estudios han relacionado esta medida con la resistencia a la compresión (del Río et al, 2004; Popovics et al, 1990), medidas de porosidad (Hernández et al, 2006a, 2004; Punurai et al, 2007), la evaluación de daños y grietas (Chaix et al, 2006; Lafhaj y Goueygou, 2009; Shiotani y Aggelis, 2009), grado de hidratación (Krau y Hariri, 2006), proceso de endurecimiento (Lee et al, 2004), relación agua/cemento (del Río et al, 2004) y la edad del hormigón (Popovics et al, 1990; Robeyst et al, 2008), entre otros estudios. Las investigaciones sobre estos materiales también han hecho uso de técnicas de inteligencia artificial, principalmente con redes neuronales artificiales. Estas técnicas han sido empleadas para la predicción de la resistencia a la compresión, seleccionando parámetros asociados al proceso de manufactura (Lee, 2003; Ni y Wang, 2000; Yeh, 1998) y cantidades físicas obtenidas de registros ultrasónicos como es el caso de la velocidad ultrasónica (Kewalramani y Gupta, 2006).

La atenuación ultrasónica también ha sido usada para la caracterización de materiales cementicios, por ejemplo, en la predicción de la resistencia a la compresión (Tharmaratnam y Tan, 1990), en la estimación del tamaño, distribución y concentración de agregados (Aggelis y Philippidis, 2004; Chaix et al, 2006; Gaydecki et al, 1992; Ju et al, 2006; Punurai et al, 2006), en la cuantificación y evaluación de microgrietas y daños (Aggelis et al, 2008; Anugonda et al, 2001; Becker et al, 2003; Chaix et al, 2006; Ju et al, 2006; Shiotani y Aggelis, 2009). A diferencia de la velocidad, la exactitud de esta medida depende, en gran medida, de la geometría de la muestra a inspeccionar, el tipo de acoplamiento y la presión ejercida entre el transductor y la muestra. La interpretación de la atenuación requiere un estudio más detallado entre los mecanismos que intervienen en la disipación (absorción) y *dispersión* de la energía asociada a la onda ultrasónica, la dependencia frecuencial debido a los efectos de dispersión, y la influencia de esta medida con respecto a parámetros microestructurales de los materiales cementicios.

Los modelos que estudian la dispersión ultrasónica, se pueden dividir en dos grupos (Izquierdo, 2000), los modelos estocásticos basados en estudiar el ruido estructural como consecuencia de la energía dispersada y que utilizan herramientas estadísticas, y los modelos físico-matemáticos, denominados modelos de dispersión. El análisis del ruido estructural ultrasónico (Izquierdo et al, 2007; Saniie y Bilgutay, 1986; Saniie et al, 1988) se considera una técnica novedosa en el ámbito de la caracterización ultrasónica de materiales, donde la estimación del coeficiente de atenuación (Chaix et al, 2003; Vergara et al, 2003), la extracción de la frecuencia centroide (Vergara et al, 2004a,b) y el estudio de estadísticos de orden superior (Miralles et al, 2004) son las contribuciones más relevantes que se han realizado hasta la fecha con respecto a este tipo de información en pastas de cemento. No obstante, la dificultad estriba en poder ajustar estos modelos a materiales más heterogéneos como son el mortero y el hormigón. De este modo, los modelos estocásticos que simulan el ruido estructural son más utilizados en la validación de nuevas técnicas de filtrado de señales provenientes de medios altamente dispersivos, ya que consideran la dependencia frecuencial de los mecanismos de atenuación y la no linealidad del coeficiente de reflectividad (Izquierdo et al, 2000, 2002; Molero et al, 2007), a diferencia de los modelos físico-matemáticos que son más adecuados para el estudio y la descripción de la propagación de las ondas ultrasónicas en medios no homogéneos.

En la actualidad, diferentes grupos de investigación están estudiando la caracterización de los materiales cementicios a partir de la dependencia de la velocidad y la atenuación ultrasónica con la frecuencia, mediante el uso de *modelos de dispersión ultrasónica*. Esta dependencia frecuencial es consecuencia de la relación existente entre la longitud de onda de la señal ultrasónica y el tamaño de las heterogeneidades presentes en estos materiales. Así, se establece un estudio más profundo entre la propagación de las ondas a través de los materiales cementicios. Punurai et al (2007, 2006) estimaron el tamaño y fracción de volumen del aire ocluido (aire atrapado e incorporado) en pastas de cemento utilizando perfiles de atenuación por dispersión. Otros grupos de investigación han realizado estudios exhaustivos tanto teóricos (Aggelis et al, 2005), como experimentales (Aggelis y Philippidis, 2004) de la velocidad y atenuación en mortero fresco con distintas relaciones agua/cemento y arena/cemento. Philippidis y Aggelis (2005), por su parte, han publicado los resultados experimentales de la influencia de distintas relaciones de agua/cemento, arena/cemento y tamaño de agregados sobre mediciones de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia. Chaix et al (2006) utilizaron un modelo de dispersión múltiple para la caracterización de microgrietas generadas térmicamente en probetas de hormigón. Molero et

al (2009) utilizaron redes neuronales para la generación de imágenes que proporcionan la distribución de la relación arena/cemento en mortero a partir de curvas de atenuación ultrasónica dependientes de la frecuencia. Sin embargo, aunque algunos resultados son esperanzadores, es necesario seguir avanzado en esta línea de investigación con el objetivo de aplicar este conocimiento a la caracterización de los materiales cementicios.

*Este trabajo de tesis se centra en la caracterización de los materiales cementicios a partir de la información de la velocidad de fase y atenuación ultrasónica dependientes de la frecuencia mediante modelos de dispersión múltiple.*

### **1.3. Objetivos**

El objetivo principal de esta tesis es desarrollar una metodología que permita evaluar características microestructurales de los materiales cementicios mediante la dispersión ultrasónica. Para ello, es necesario contar con un modelo que sea capaz de describir la propagación de ondas ultrasónicas en medios no homogéneos.

Este objetivo principal se divide en una serie de objetivos parciales:

- I. Estudio, desarrollo y validación experimental de un modelo N-fásico de dispersión múltiple para cualquier concentración de agregados que permita la descripción de la propagación de ondas mecánicas (ultrasónicas) en medios no homogéneos.
- II. Desarrollo e implantación de técnicas de inspección ultrasónica para medidas de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia, como también algoritmos de procesado para la extracción de estos parámetros.
- III. Estudio teórico y experimental de la influencia de las propiedades microestructurales de los materiales cementicios sobre perfiles de velocidad y atenuación ultrasónica.
- IV. Desarrollo de una metodología para la caracterización de materiales cementicios mediante la dispersión ultrasónica.



### 1.4. Estructura de la tesis

La presente tesis está estructurada en siete capítulos, como se describen a continuación:

En este primer capítulo se ha abordado el contexto y la necesidad de la investigación, así como también el estado de la cuestión.

En el segundo y tercer capítulo se describen brevemente las características principales de los materiales cementicios y los fundamentos de la propagación de ondas mecánicas en medio heterogéneos, respectivamente.

En el capítulo cuarto se desarrolla el modelo dinámico autoconsistente N-fásico que permite la modelización de la propagación de una onda mecánica (ultrasónica) en medios y materiales heterogéneos. Se desarrolla un estudio teórico de la dispersión ultrasónica mediante este modelo para estudiar la influencia de parámetros microestructurales, tales como la matriz cementicia, el tamaño y concentración de agregados y aire ocluido en términos de la velocidad de fase y atenuación dependientes de la frecuencia.

En el capítulo quinto se se presenta los métodos y técnicas de inspección y procesamiento de señales ultrasónicas implementados para la determinación experimental de la velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia.

Así, en el capítulo sexto, se valida experimentalmente el modelo dinámico autoconsistente N-fásico y se exponen una metodología para la caracterización de materiales cementicios a partir de este modelo con respecto medidas de velocidad y atenuación ultrasónicas.

Por último, en el capítulo séptimo se presentan las conclusiones, contribuciones en los campos de aplicación pertinentes, así como también las líneas de investigación que se pretenden realizar en el futuro, tomando como partida este trabajo de investigación.



---

## CAPÍTULO 2

# CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE LOS MATERIALES CEMENTICIOS

---

*En este capítulo se hace una breve descripción de las características más importantes de los materiales cementicios. Se definen los parámetros microestructurales a estudiar a lo largo de la tesis y la terminología más típica dentro del campo de los materiales cementicios.*

### 2.1. Introducción

Los materiales cementicios son aquéllos fabricados, principalmente, por cemento que al mezclarse con agua forma un medio aglutinante. El cemento es un material pulverizado muy fino que por si mismo no es aglutinante sino que desarrolla sus propiedades como resultado de la hidratación, es decir, a partir de las reacciones químicas entre los minerales del cemento y el agua. Los ejemplos más usuales de materiales cementicios son el mortero y el hormigón. El primero, es una mezcla de cemento, agregados finos (áridos) y agua. Mientras que el segundo, es una mezcla de mortero con agregados gruesos (grava, piedra triturada). Además, pueden ser incluidos en la mezcla otros elementos denominados aditivos que modifican y benefician el desempeño de la mezcla resultante.

La selección de un material de construcción para una aplicación específica ha de tener en cuenta la capacidad de éste para resistir una fuerza aplicada (carga de esfuerzo). Bajo la aplicación de las cargas de esfuerzo el material es deformado y dependiendo de cómo se ejerzan, pueden ser clasificadas como de compresión, tracción, flexión, cizalladura y torsión. Las relaciones de esfuerzo-deformación son generalmente expresadas en términos de la resistencia y los módulos elásticos del material<sup>1</sup>. La resistencia es una medida que define la capacidad de un material para resistir esfuerzos y fuerzas aplicadas sin romperse, adquirir deformaciones permanentes o deteriorarse de algún modo.

---

<sup>1</sup>En el capítulo 3 se hace una descripción más detallada de los módulos elásticos.

En la fabricación de los materiales cementicios se considera más significativo referirse a la resistencia a la compresión, por lo que en general, es la primera que se especifica. Debido a que la resistencia de estos materiales está en función del proceso de hidratación del cemento, que es relativamente lento, las pruebas de resistencia se basan en muestras curadas en condiciones normales de temperatura y humedad durante un período de 28 días. Típicamente, la resistencia a la tracción y a la flexión del hormigón son del orden del 10 y 15 %, respectivamente, de la resistencia a la compresión. El motivo de estas diferencias entre la resistencia a la compresión y a la tracción se atribuyen a la heterogeneidad y compleja microestructura de estos materiales. Basándose en unidades de densidad, el hormigón puede ser clasificado en tres categorías (Mehta y Monteiro, 2006), normal, baja y alta densidad. El hormigón que contenga arena y grava o roca triturada como agregados, con una densidad alrededor de los 2400 [kg/m<sup>3</sup>] es denominado un hormigón de peso normal y es el más utilizado para la edificación de estructuras. El término de hormigón de baja densidad se usa para hormigones que tengan densidades menores que 1800 [kg/m<sup>3</sup>], mientras que el hormigón de alta densidad posee densidades mayores que 3200 [kg/m<sup>3</sup>]. Por otra parte, la resistencia de los hormigones pueden dividirse como baja (< 20 [MPa]), normal (20 a 40 [MPa]) y alta resistencia (> 40 [MPa]). Asimismo, existen numerosos tipos de hormigón modificados con el fin de mejorar sus características dependiendo de la aplicación, tales como los hormigones reforzados con fibras, hormigones preimpregnados con polímeros, etc. Así, la resistencia de estos materiales depende de las proporciones entre los diferentes constituyentes que los forman y está muy influenciada por el contenido de la pasta de cemento y la relación agua/cemento. Diferentes ejemplos reales de dosificación se ilustran en la Tabla 2.1.

	Resistencia Baja [kg/m <sup>3</sup> ]	Resistencia Normal [kg/m <sup>3</sup> ]	Resistencia Alta [kg/m <sup>3</sup> ]
Cemento	255	356	510
Agua	178	178	178
Agregados Finos	801	848	890
Agregados Gruesos	1169	1032	872
Proporción de pasta de cemento			
porcentaje de masa	18	22.1	28.1
porcentaje de volumen	26	29.3	34.3
relación agua/cemento	0.70	0.50	0.35
Resistencia [MPa]	18	30	60

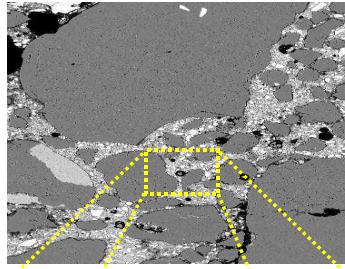
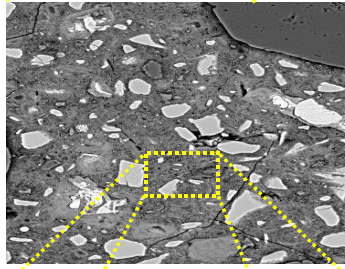
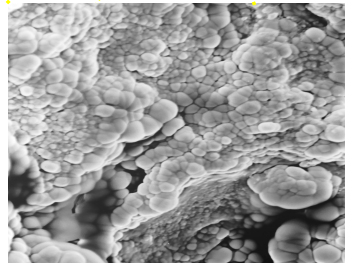
**Tabla 2.1.** *Proporciones típicas de materiales en mezclas de hormigón con diferentes resistencias (Mehta y Monteiro, 2006).*

La microestructura de los materiales cementicios está principalmente determinada por el tipo y proporción de cemento, propiedades de los agregados, las relaciones de peso de agua/cemento ( $w/c$ ), arena/cemento ( $s/c$ ), y la porosidad. Debido a que la calidad y durabilidad de los materiales cementicios están en gran medida influenciados por su microestructura, es necesario una adecuada descripción de la misma.

### 2.2. Microestructura de los materiales cementicios

El tipo, cantidad, tamaño, forma, distribución e interacción de los distintos constituyentes, fases, en un material forman su microestructura. El conocimiento de las características y propiedades microestructurales que presentan los materiales cementicios es fundamental para el estudio de su calidad y durabilidad. Como se ha mencionado en el primer capítulo, la heterogeneidad en la microestructura de estos materiales hace que su descripción sea compleja. El grado de heterogeneidad puede ser abordado dependiendo de la escala de medida en que se analicen. Por ejemplo, el hormigón puede considerarse homogéneo en una escala de centímetros pero disminuyendo esta escala de centímetros a milímetros este material tiene que ser visto como un material altamente heterogéneo. Por tal motivo, la microestructura de los materiales cementicios debe describirse en varios niveles, que abarcan desde el rango de los nanómetros hasta el rango de las décimas de metros. Un esquema que representa estos niveles se muestra en la Figura 2.2, donde se ha dividido en tres niveles de menor a mayor escalar, tal como se describe a continuación:

- *Nivel I.* En este nivel se estudia la presencia del gel C-S-H, Silicatos cálcicos hidratados, que es el componente mayoritario de la pasta de cemento hidratado, aproximadamente un 50-60 % del volumen total. Este nivel que comprende un dominio entre  $10^{-8}$  y  $10^{-6}$  [m] puede considerarse como el más bajo accesible mediante ensayos mecánicos.
- *Nivel II.* Este nivel se encuentra la matriz de gel C-S-H junto con cristales de portlandita de gran tamaño, los granos de cemento sin hidratar y poros capilares que forman la pasta de cemento. Este nivel comprende una escala del orden de  $10^{-6} - 10^{-4}$  [m].
- *Nivel III.* Este nivel se refiere al mortero y hormigón considerados como materiales heterogéneos y constituidos por una matriz de pasta de cemento, agregados y macroporos. El primero con agregados finos, mientras que el segundo está compuesto tanto de agregados finos como gruesos. Este nivel corresponde a un escala comprendida entre  $10^{-4} - 10^{-1}$  [m].

**NIVEL  
III****Mortero /  
Hormigón****NIVEL II****Pasta de  
cemento****NIVEL I****Matriz de  
gel C-S-H**

**Figura 2.1.** Niveles Microestructurales de los materiales cementicios (Segura, 2008).

No obstante, el estudio teórico y la modelización de los fenómenos dispersivos pueden ser aplicados a cualquiera de los niveles de análisis microestructural definidos dependiendo de la instrumentación ultrasónica utilizada. En este trabajo sólo se abordarán los niveles II y III en la caracterización de estos materiales, haciendo mayor énfasis en las características de la pasta de cemento, porosidad (microporos), aire ocluido (macroporos), y agregados. A continuación se da una breve descripción de estos componentes.

### 2.2.1. Pasta de Cemento

Las propiedades de la pasta de cemento hidratado se obtienen como resultado de las reacciones químicas entre las distintas fases que forman el clinker de cemento y el agua. Los silicatos cálcicos hidratados, también denominados como gel C-S-H<sup>2</sup>, se forman a partir de la hidratación de los silicatos cálcicos alita y belita, los cuales están en mayor proporción en el cemento y generan los mismos productos de hidratación, aunque en distinta proporción. Los silicatos cálcicos hidratados ocupan entre el 50-60 % del volumen de sólidos en una pasta de

<sup>2</sup>En la química del cemento se utiliza la notación abreviada siguiente para referirse a las sustancias que forman los materiales cementicios: C=CaO; A=Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>; F=Fe<sub>2</sub>O<sub>3</sub>; S= SiO<sub>2</sub>; H=H<sub>2</sub>O; N=Na<sub>2</sub>O; K=K<sub>2</sub>.

cemento completamente hidratada siendo los responsables de las propiedades resistentes y durables de los materiales cementicios. Este gel es una mezcla de partículas laminares pobremente cristalizadas, de variada morfología y composición química rodeado de un sistema más o menos continuo de poros (poros de gel) que pueden estar parcial o totalmente llenos de agua. El hidróxido de calcio, también conocido como portlandita, constituye entre el 20 y 25 % del volumen de sólidos presentes en la pasta. A diferencia del gel C-S-H, el hidróxido cálcico es un compuesto con una estequiometría definida,  $\text{Ca(OH)}_2$ . Además, la presencia de una cantidad considerable de portlandita tiene un efecto negativo en la durabilidad química a las soluciones ácidas debido a su alta solubilidad. Los compuestos de sulfoaluminatos cálcicos ocupan entre el 15 y 20 % del volumen de sólidos de la pasta hidratada y por lo tanto juegan un papel minoritario en las relaciones entre estructura - propiedades. Dependiendo de la distribución de tamaños de las partículas del cemento y del grado de hidratación, se pueden encontrar granos de clinker sin hidratar en la microestructura, aún mucho tiempo después de la hidratación. Esto es una consecuencia del rango de tamaños que presenta el clinker generalmente entre 1 y 50 [ $\mu\text{m}$ ], ya que al comenzar la hidratación las partículas más pequeñas son las primeras en disolverse completamente y como los productos de hidratación tienden a cristalizar en la vecindad de las partículas hidratadas, las partículas de mayor tamaño disponen de poco espacio para su hidratación.

En la estructura de la pasta de cemento además de las fases mencionadas anteriormente y debido a que en la hidratación se utiliza una cantidad de agua superior a la necesaria para hidratar totalmente el cemento (38 %), se encuentra una red de poros aislados e interconectados, los cuales son los responsables de los mecanismos de transporte de sustancias dentro de la estructura y del posterior deterioro de ésta.

### 2.2.2. Estructura porosa

La microestructura porosa de los materiales cementicios influye en gran medida sobre el comportamiento físico, químico y mecánico de estos materiales. Asimismo, esta estructura porosa es la principal responsable del transporte de sustancias hacia el interior del material y de su degradación. La porosidad en los materiales cementicios viene dada por dos factores fundamentales (Segura, 2008):

- En la hidratación del cemento se emplea una cantidad de agua superior a la necesaria para hidratar totalmente el cemento con el fin de lograr una adecuada trabajabilidad del material pero que condiciona la presencia de una red de poros interconectados

Clasificación	Tipo de Poro	Tamaño †
Macroporos (aire ocluido)	Aire atrapado	0.1-3 [mm]
	Aire incorporado	50-1000 [ $\mu\text{m}$ ]
Poros Capilares	Capilares grandes	10-50 [ $\mu\text{m}$ ]
	Capilares de tamaño moderado	0.05-15 [ $\mu\text{m}$ ]
Poros de Gel	Pequeños capilares de gel	10-2.5 [nm]
	Microporos, poros de gel	2.5-0.5 [nm]
	Poros en granos cristalinos	< 0.5 [nm]

† La primera y segunda fila con referencia de (Mehta y Monteiro, 2006) y de la tercera a la séptima según (Mindess et al, 2002).

**Tabla 2.2.** Clasificación de los poros en la pasta de cemento hidratado.

en mayor o menor medida que son los responsables de los mecanismos de transporte dentro del material.

- Los procesos de reacción e hidratación de los materiales junto con el desarrollo de los productos de las pasta de cemento hidratado conlleva la aparición de porosidad como una parte inherente a la estructura del gel C-S-H.

La microestructura porosa suele caracterizarse en función de tres propiedades estructurales, como son el volumen de poros o porosidad, la superficie específica interna de los poros y la distribución de tamaños del poro, que a continuación se detallan:

- La porosidad expresa la relación entre la parte de volumen, total o accesible, de una muestra ocupado por poros, con respecto al volumen total del material.
- La superficie específica interna de los poros es el área o superficie accesible por unidad de volumen o de masa de una sustancia dada.
- La distribución de tamaños de los poros permite delimitar el volumen total de los mismos por rangos de tamaños definidos. El tamaño de los poros de la pasta de cemento abarca un rango de varios órdenes de magnitud pudiéndose clasificar como se muestra en la Tabla 2.2.

Los poros de gel se forman como resultado de la hidratación del cemento debido a que los productos de hidratación no rellenan completamente el volumen y dejan un espacio entre las partículas del gel de cemento. Asimismo, estos poros son extremadamente pequeños,



del orden de los 1.5 [nm] por lo que no influyen negativamente en la resistencia mecánica de los materiales cementicios. Por otra parte, como resultado del cambio de volumen en el sistema agua-cemento, los productos de hidratación tienen un volumen más pequeño que el volumen inicial de los constituyentes antes de la reacción. Los espacios entre partículas de la pasta de cemento totalmente hidratadas y las no hidratadas son los denominados poros capilares. Estos poros generalmente están rellenos con soluciones de los constituyentes de hidratación del cemento y también con aire. El volumen de estos poros capilares disminuye con el avance del proceso de hidratación ya que los productos de hidratación ocupan un volumen mayor que el doble del cemento original. Esta porosidad capilar depende en gran medida de la relación agua/cemento.

A diferencia de los poros capilares que son de forma irregular, los macroporos o aire ocluido son generalmente esféricos y pueden ser clasificados en aire atrapado o aire incorporado. El aire atrapado son burbujas cerradas de aire que quedan atrapadas durante el amasado de los materiales cementicios en el proceso de fabricación. El tamaño de este tipo de poros puede encontrarse desde 0.1 hasta 3 [mm], por lo que pueden afectar negativamente a la resistencia mecánica del material. Por otra parte, en materiales fabricados para resistir bajas temperaturas o ciclos de hielo-deshielo a fin de mejorar su rendimiento y evitar la degradación de su estructura debido al congelamiento y deshielo de agua dentro del interior de los mismos, una medida es formar en un sistema de poros en la pasta de cemento de adecuados tamaños y distribución mediante la incorporación de aire a través de aditivos especializados durante la fabricación de la mezcla. Estos poros incorporados usualmente se encuentran en un rango de tamaño de 50 a 1000 [ $\mu$ m].

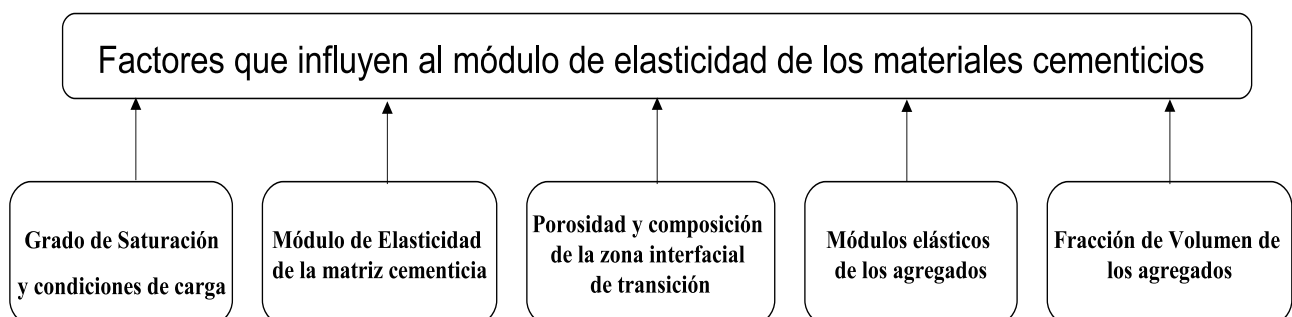
### 2.2.3. Agregados

Los agregados son materiales granulares inertes que conforman el elemento mayoritario del peso total del mortero y hormigón, de tamaños comprendidos entre 0 y 100 [mm], por lo que son en gran parte responsables de las características de estos materiales. Los agregados pueden ocupar hasta un 80 % del volumen total del material cementicio, siendo el resto la pasta de cemento que rellena los huecos existente entre ellos y crea una capa que mantiene unidos a los gránulos (Fernández-Canovas, 2002). Estos componentes se dividen en dos clases: agregados finos y agregados gruesos. Esta clasificación viene dada por la diferencias entre tamaños, es decir, el término de agregado grueso es usado para referirse a partículas mayores a 4.75 [mm], mientras que el término de agregado fino se da para tamaños menores. Generalmente, los agregados finos o áridos finos contienen partículas en

un rango de tamaño desde 75 [ $\mu\text{m}$ ] hasta los 4.75 [mm], y los agregados gruesos o áridos gruesos tienen un rango desde los 4.75 [mm] hasta los 50 [mm], excepto para el hormigón masivo en el que pueden llegar hasta los 150 [mm] (Mehta y Monteiro, 2006). La forma del agregado fino suele ser generalmente esférico (arena), mientras que la forma del agregado grueso puede asemejarse a una forma cúbica si es roca triturada o esferoide si es grava del río. Los agregados que se emplean en los materiales cementicios se obtienen mezclando una distribución de tamaños para alcanzar una granulometría óptima. El tamaño mínimo y máximo de los agregados son factores muy importantes que tienen que considerarse ya que influyen en la trabajabilidad y coste de la fabricación del material. Por ejemplo, al usar agregados de tamaños muy grandes se produce una mezcla que carece de la trabajabilidad y de la consistencia deseadas pero serán menores las necesidades de cemento y agua. Por otro lado, una mezcla con agregados muy finos necesitará mayor cantidad de agua de amasado, y por consiguiente mayor aporte de cemento para poder mantener constante la relación agua/cemento. En cada caso hay que encontrar una fórmula de compromiso teniendo en cuenta estos factores.

### 2.3. Relación microestructura-propiedades de los materiales cementicios

El mortero y el hormigón son ejemplos clásicos de materiales compuestos. Desde hace años se ha venido aplicando a este tipo de materiales la teoría de los materiales multifásicos, véase (Ahmed y Jones, 1990; Yaman et al, 2002), con el fin de determinar las propiedades elásticas de estos materiales; por ejemplo, el módulo de elasticidad. En la Figura 2.2 se muestra un esquema de los principales parámetros que influyen en el módulo de elasticidad de los materiales cementicios.



**Figura 2.2.** Principales parámetros que influyen en el módulo de elasticidad de los materiales cementicios.

En este esquema se observa que conociendo las propiedades de la matriz cementicia, agregados y porosidad se puede estimar en gran medida el módulo de elasticidad y por consiguiente se podría una estimación de la calidad y de la resistencia del material compuesto. Sin embargo, en la actualidad no existe un modelo matemático único que describa los materiales cementicios en general, debido principalmente a la compleja estructura que poseen. En este trabajo se estudiará a los materiales cementicios como materiales que consisten en una matriz de cemento, agregados y aire ocluido, con especial interés en el caso del mortero.

La caracterización de los materiales cementicios se llevará a cabo mediante una metodología que consiste en el estudio de la propagación de ondas ultrasónicas en estos materiales no homogéneos. Por tal motivo, en el siguiente capítulo se describen los fundamentos de la propagación de ondas mecánicas tanto en medios homogéneos como no homogéneos para dar pie a la caracterización de estos materiales mediante la dispersión múltiple de ondas ultrasónicas, aspecto que será tratado en profundidad en el capítulo 4.



---

## CAPÍTULO 3

# FUNDAMENTOS DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS MECÁNICAS EN MATERIALES NO HOMOGÉNEOS

---

*En este capítulo se abordan los fundamentos de la propagación de ondas en medios homogéneos y no homogéneos. Se hace la descripción de los materiales a partir de sus constantes elásticas, así como las relaciones que guardan las mismas con los parámetros que definen la propagación de una onda mecánica. Asimismo, se introduce el concepto de dispersión.*

### 3.1. Introducción

Una onda mecánica puede definirse como *la propagación de una deformación en un cuerpo o medio elástico* por lo que se infiere que el modo en que se propaga tal deformación u onda mecánica está condicionada por el medio. De forma inversa, la caracterización de un medio o material está en función del conocimiento del modo y características de propagación de dichas ondas. A su vez, las ondas pueden ser descritas a partir de parámetros físicos, por ejemplo la velocidad de propagación, que guarda relación con las constantes del medio de propagación. Por tal motivo, es necesario contar con modelos físico-matemáticos que ayuden a describir las relaciones esfuerzo-deformación, y por consiguiente, la propagación de las ondas de esfuerzo sometidas al medio.

En este capítulo se describe, primero, los conceptos de deformación, esfuerzo y la ley que los relaciona, ley de *Hooke*. Posteriormente, se introduce la descripción tanto de la propagación de ondas en medios homogéneos como no homogéneos. Por último, se establece el concepto de dispersión que da lugar al estudio y caracterización de materiales compuestos a partir de modelos físico-matemáticos en los siguientes capítulos de la presente tesis.

### 3.2. Propagación de ondas en medios continuos

El propósito de la mecánica del medio continuo es describir el movimiento de partículas en función del espacio y tiempo. El estudio del medio continuo es aquél que desprecia la estructura atómica de los materiales, estructura discreta, y como consecuencia admite que no hay discontinuidades entre partículas por lo que la descripción del medio se realiza mediante funciones continuas. En esta sección exponemos los conceptos más importantes para la descripción del fenómeno de propagación de ondas mecánicas en medios continuos tomando en cuenta los fundamentos de la teoría de la elasticidad (Auld, 1973; Sadd, 2005; Timoshenko y Goodier, 1951). De tal forma que el estudio de la interacción deformación-propagación de ondas mecánicas puede ser descrita por un conjunto de ecuaciones no lineales en derivadas parciales referidas comúnmente como ecuaciones de *Navier*. Estas ecuaciones describen el movimiento relativo de las partículas de un medio provocado por los esfuerzos internos y las fuerzas de volumen (fuerzas exteriores) aplicadas a los mismos. Las ecuaciones de Navier contienen demasiadas incógnitas lo que las hacen insuficientes y complicadas para la descripción del sistema, por lo que deben de complementarse con otro tipo de relaciones propias del material y formularse en función de otros parámetros en vez de los desplazamientos o deformaciones. Estas relaciones pueden ser *las ecuaciones constitutivas*, que caracterizan las propiedades físicas de los medios. Debido a la infinita variedad de materiales, el estudio y desarrollo de las ecuaciones constitutivas es quizás uno de los campos más interesantes y difíciles dentro de la mecánica del medio continuo (Sadd, 2005).

#### 3.2.1. Esfuerzo, deformación y ley de Hooke

Bajo la aplicación de una fuerza externa, los cuerpos elásticos se deforman, es decir, un cuerpo elástico se deforma o es deformable cuando la posiciones relativas entre dos puntos pertenecientes a éste han variado. La deformación se expresa en función de la razón de cambio de los vectores de desplazamiento  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(u, v, w)$  con respecto al sistema de referencia  $(x, y, z)$ , pudiéndose escribir tanto en notación de índices como en notación vectorial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.2.1)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (3.2.2)$$

donde  $u_{i,j}$ , que está escrita en notación de índices, indica la derivada parcial con respecto a la componente indicada, por ejemplo  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ . Además los índices  $i, j$  varían de 1 a 3 y se suman sobre índices repetidos. La deformación  $\varepsilon_{ij}$  es un tensor simétrico de segundo orden,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ , comúnmente escrito en formato matricial como:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

donde las componentes diagonales son denominadas deformaciones longitudinales, mientras que el resto de las componentes son llamadas transversales o de cizalladura, definidas como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.2.4)$$

Existen dos tipos de fuerzas que pueden actuar sobre un cuerpo elástico: las fuerzas de volumen y las fuerzas de superficie. Las primeras son fuerzas de gran alcance que actúan sobre todas las partículas del cuerpo sólido y para cada elemento del cuerpo son proporcionales a su masa ó volumen. Por otra parte, las fuerzas superficiales actúan sobre las fronteras o contornos del sólido. Este efecto no se produce sobre todas las partículas del cuerpo al mismo tiempo, sino que se transmite progresivamente a todas ellas mediante los esfuerzos internos que sufren las mismas. El esfuerzo está definido como la fuerza de superficie que actúa sobre un cuerpo con respecto a los elementos de superficie del mismo como por ejemplo el área de la sección transversal. De igual forma que la deformación, el esfuerzo  $\sigma_{ij}$  es un tensor simétrico de segundo orden,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ , expresándose en forma matricial como:

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Dada la descripción de la deformación que sufre un cuerpo sólido y las fuerzas internas que actúan sobre éste (esfuerzos), existe una relación que establece la proporcionalidad de los esfuerzos con respecto a las deformaciones dado un sistema de referencia tridimensional. Esta relación es denominada como *Ley de Hooke*:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.2.6)$$

Esta expresión, mejor conocida como la *Ley de Hooke generalizada*, donde  $C_{ijkl}$  es un ten-

sor de cuarto orden referido como *el tensor de constantes elásticas* cuyas 81 componentes incluyen todos los parámetros necesarios para caracterizar a un cuerpo elástico. Considerando la simetría, tanto del tensor de deformaciones como del tensor de esfuerzos, resulta que el tensor de constantes elásticas también es simétrico,  $C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk}$ , por lo que se reducen de 81 a 36 el número de constantes independientes. Debido a que la energía elástica de los esfuerzos viene dada mediante una forma cuadrática definida positiva (equilibrio estable de la energía), lo que implica que (Sadd, 2005, pag. 106),  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}}$ ,  $\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}}$ , por lo que se añade otra condición de simetría,  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , resultando una reducción de 36 a 21 componentes independientes. El tensor de constantes elásticas puede rotarse por medio de transformaciones usando tensores de menor orden,  $C_{ijkl} = Q_{im}Q_{jn}Q_{kp}Q_{lq}C_{mnpq}$ . Asumiendo un material isótropo, que actúa de igual forma independientemente de la dirección en que es ejercida la fuerza, entonces el tensor de elasticidad debe ser el mismo bajo todas las rotaciones del sistema coordenado, resultando:

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.2.7)$$

donde los tensores de transformación son asignados como deltas de Kronecker, definidas como:  $\delta_{mn} = 1$  cuando  $m = n$  y  $\delta_{mn} = 0$  para  $m \neq n$ .

La constante  $\lambda$  es denominada *la constante de Lamé* y  $\mu$  es referido como la *constante transversal o de rigidez*. El módulo transversal  $\mu$ , a diferencia de la constante de Lamé  $\lambda$ , tiene una interpretación física directa que indica la resistencia al esfuerzo transversal aplicado como son las tensiones cortantes. Sustituyendo la expresión (3.2.7) en (3.2.6), resulta:

$$\sigma_{ij} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \varepsilon_{kl} \quad (3.2.8)$$

y empleando las siguientes propiedades de la notación de índices  $\delta_{mn} \varepsilon_{np} = \varepsilon_{mp}$ ,  $\delta_{mn} \varepsilon_{mn} = \varepsilon_{mm}$  y  $\delta_{np} \varepsilon_{mp} = \varepsilon_{nn}$ , así como las propiedades de simetría del tensor de deformación  $\varepsilon_{mn} = \varepsilon_{nm}$ , la ecuación (3.2.8) puede ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = C_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (3.2.9)$$

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.2.10)$$

En este caso de isotropía, el tensor  $C_{ijkl}$  es equivalente a un tensor de segundo orden  $C_{ij}$



denominado el *tensor de módulos elásticos* que en notación matricial se representa como:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (3.2.11)$$

donde  $C_{11} = \lambda + 2\mu$ ,  $C_{12} = \lambda$  y  $C_{44} = \mu$ . No obstante, el esfuerzo y la deformación pueden ser relacionados por medio de otras dos constantes elásticas como a continuación se muestra. Expresando (3.2.10) mediante dos índices iguales cualesquiera, proceso de contracción, véase (Sadd, 2005, pág.5), y despejando  $\varepsilon_{kk}$ , se obtiene que:

$$\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \sigma_{kk} \quad (3.2.12)$$

Sustituyendo (3.2.12) en (3.2.10) y despejando en términos de  $\varepsilon_{ij}$ , resulta que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.2.13)$$

La ecuación (3.2.13) puede ser escrita en función de dos nuevas constantes dando lugar a la definición de dos constantes elásticas referidas como el *módulo de elasticidad* o de Young  $E$ , y la *relación ó coeficiente de Poisson*  $\nu$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (3.2.14)$$

donde

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)} \quad (3.2.15)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (3.2.16)$$

El módulo de Young expresa la relación entre el esfuerzo aplicado y la deformación resultante, mientras que el coeficiente de Poisson señala la relación entre las deformaciones longitudinales y transversales. La traza o suma de la diagonal del tensor de deformación  $\varepsilon_{kk}$  define otro parámetro denominado *dilatación*  $\theta_D$ , que describe la expansión o contracción de un cuerpo (cambio de volumen). Haciendo uso de este parámetro se define una constante elástica

ca llamada *módulo volumétrico* o de *incompresibilidad*, que indica la deformación volumétrica que sufre un cuerpo bajo la acción de carga. Esta constante está en función de la razón de cambio de la presión hidrostática  $p_h$ , con respecto a la dilatación, por lo que  $K = -\frac{dp_h}{d\theta_D}$  ya que  $d\sigma_{ij} = -dp_h\delta_{ij}$ , entonces  $-dp_h\delta_{ij} = \lambda d\theta_D\delta_{ij} + 2\mu d\varepsilon_{ij}$ , resultando que:

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (3.2.17)$$

Como se ha descrito anteriormente, el tensor de módulos elásticos puede ser determinado por dos contantes elásticas e independientes, que son elegidas empleando cualquier combinación de pares entre  $\lambda, \mu, E, \nu$  y  $K$ . Aunque sólo hemos expresado algunas relaciones que guardan estas constantes entre ellas, en la Tabla 3.1 se presentan todas las posibles combinaciones para la caracterización de materiales isotrópicos y homogéneos.

	$\lambda$	$\mu$	$E$	$\nu$	$K$
$\lambda, \mu$			$\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$	$\lambda + \frac{2}{3}\mu$
$\lambda, E$		$\frac{E - 3\lambda + \mathcal{R}}{4}$		$\frac{2\lambda}{E + \lambda + \mathcal{R}}$	$\frac{E + 3\lambda + \mathcal{R}}{6}$
$\lambda, \nu$		$\frac{\lambda(1 - 2\nu)}{2\nu}$	$\frac{\lambda(1 + \nu)(1 - 2\nu)}{\nu}$		$\frac{\lambda(1 + \nu)}{3\nu}$
$\lambda, K$		$\frac{3}{2}(K - \lambda)$	$\frac{9K(K - \lambda)}{3K - \lambda}$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$	
$\mu, E$	$\frac{\mu(2\mu - E)}{E - 3\mu}$			$\frac{E - 2\mu}{\mu}$	$\frac{\mu E}{3(3\mu - E)}$
$\mu, \nu$	$\frac{2\mu\nu}{1 - 2\nu}$		$2\mu(1 + \nu)$		$\frac{2\mu(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$
$\mu, K$	$K - \frac{2}{3}\mu$		$\frac{9K\mu}{3K + \mu}$	$\frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}$	
$E, \nu$	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$			$\frac{E}{3(1 + \nu)}$
$E, K$	$\frac{9K^2 - 3KE}{9K - E}$	$\frac{3EK}{9K - E}$		$\frac{3K - E}{6K}$	
$\nu, K$	$\frac{3K\nu}{1 + \nu}$	$\frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$3K(1 - 2\nu)$		

$$\mathcal{R} = \sqrt{E^2 + 9\lambda^2 + 2\lambda E}$$

**Tabla 3.1.** Relación entre pares de constantes elásticas para materiales isotrópicos y homogéneos.

### 3.2.2. Ecuaciones de Navier

Se han mostrado los diferentes pares de constantes elásticas que describen al tensor de constantes elásticas, y al mismo tiempo que brindan distintas relaciones entre los esfuerzos y las deformaciones, por lo que a continuación se exponen las leyes constitutivas en función de los desplazamientos. Sustituyendo (3.2.1) en la ecuación constitutiva dada por (3.2.10),  $\sigma_{ij}$  queda expresada en términos del desplazamiento como:

$$\sigma_{ij} = \lambda u_{k,k} \delta_{ij} + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.2.18)$$

que a su vez puede ser escrita de acuerdo a las siguientes ecuaciones escalares:

$$\sigma_x = \lambda(\partial_{uvw}) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda(\partial_{uvw}) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \sigma_z = \lambda(\partial_{uvw}) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.2.19)$$

$$\sigma_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad \sigma_{yz} = \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right), \quad \sigma_{zx} = \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (3.2.20)$$

donde  $\partial_{uvw} = \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)$ . Usando estas relaciones en las ecuaciones de equilibrio entre los esfuerzos internos y la fuerza de volumen  $F_i$ , quedan definidas las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0 \quad (3.2.21)$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0 \quad (3.2.22)$$

Estas ecuaciones de equilibrio en términos de los desplazamientos son referidas como las ecuaciones de Navier. Este sistema puede ser expresado tanto en notación de índices como en notación vectorial:

$$\mu u_{i,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,ki} + F_i = 0 \quad (3.2.23)$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F} = 0 \quad (3.2.24)$$

o bien, en términos de las siguientes ecuaciones escalares:

$$\mu \nabla^2 u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (\partial_{uvw}) + F_x = 0, \quad \mu \nabla^2 v + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} (\partial_{uvw}) + F_y = 0, \quad \mu \nabla^2 w + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} (\partial_{uvw}) + F_z = 0 \quad (3.2.25)$$

donde el Laplaciano está dado por  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Las ecuaciones de Navier son la formulación deseada para el planteamiento del desplazamiento. Sin embargo, este sistema de ecuaciones es complicado de resolver por lo que

normalmente se utiliza otro tipo de representación que simplifique la solución del sistema. Esta representación está en función de los potenciales de desplazamiento como se describe en la siguiente sección.

### 3.2.3. Propagación de ondas en medios homogéneos e isotrópicos

Una vez descrita la forma en que se puede caracterizar un medio mediante el tensor de constantes elásticas, se describirá cómo una perturbación u onda elástica se propaga en medios homogéneos e isotrópicos. El siguiente desarrollo considera al medio de propagación como infinito (sin fronteras), homogéneo e isotrópico. En primer lugar, la ecuación (3.2.24) se iguala al producto de la aceleración de  $u_i$  por su densidad  $\rho$ , resultado la denominada ecuación elastodinámica o de Lamé (ecuación de Navier dinámica):

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda + \mu) u_{j,ij} + F_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.2.26)$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{F} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.2.27)$$

Ya que  $\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u})$  entonces se reescribe a (3.2.27) como es habitual en la literatura correspondiente a la propagación de ondas, omitiendo las fuerzas de volumen:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \quad (3.2.28)$$

El vector de desplazamiento puede ser descrito a partir de un potencial escalar de onda longitudinal  $\Phi$  y un potencial vector de onda transversal  $\Psi$ :

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \Psi \quad (3.2.29)$$

Así, la ecuación (3.2.28) en términos de  $\Phi$  y  $\Psi$  se expresa como:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla (\nabla \cdot [\nabla \phi + \nabla \times \Psi]) - \mu \nabla \times (\nabla \times [\nabla \phi + \nabla \times \Psi]) = \rho (\nabla \ddot{\phi} + \nabla \times \ddot{\Psi}) \quad (3.2.30)$$

La ecuación (3.2.30) se reduce a la siguiente forma<sup>1</sup>:

$$\nabla \left( [\lambda + 2\mu] \nabla^2 \Phi - \rho \ddot{\Phi} \right) + \nabla \times \left( \mu \nabla^2 \Psi - \rho \ddot{\Psi} \right) = \mathbf{0} \quad (3.2.31)$$

<sup>1</sup>Usando las siguientes propiedades de gradiente, divergencia y rotacional:

$$(\nabla \cdot \nabla) \Phi = \nabla^2 \Phi; \quad \nabla \times \nabla \times \Psi = \nabla (\nabla \cdot \Psi) - \nabla^2 \Psi; \quad \nabla \cdot (\nabla \times \Psi) = 0; \quad \nabla \times \nabla \Phi = \mathbf{0}; \quad \nabla \times (\nabla \times \nabla \Phi) = \mathbf{0}$$

Una posible solución de (3.2.31) depende a su vez de resolver las dos siguientes ecuaciones de onda, que predicen la existencia de dos modos de propagación independientes y correspondientes a *ondas longitudinales* -que se propagan en la misma dirección al movimiento de las partículas- y *ondas transversales* -que se propagan en dirección perpendicular a la dirección de movimiento de las partículas- representándolas como:

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{V_L^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi \quad (3.2.32)$$

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{V_T^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi \quad (3.2.33)$$

donde las *velocidades de propagación longitudinales y transversales* están relacionadas con las constantes elásticas como se muestran en las Tablas 3.2 y 3.3.

	$(\lambda, \mu)$	$(E, \mu)$	$(K, \mu)$
$V_L$	$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}}$	$\sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}$
$V_T$	$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$	$\sqrt{\frac{E}{2\rho(1 + \nu)}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

**Tabla 3.2.** Relaciones entre velocidades de propagación y las combinaciones de pares más usuales de los módulos elásticos.

	$\lambda$	$\mu$	$E$	$\nu$	$K$
$(V_L, V_T)$	$\rho(V_L^2 - 2V_T^2)$	$\rho V_T^2$	$\frac{\rho V_T^2 (3V_L^2 - 4V_T^2)}{V_L^2 - V_T^2}$	$\frac{2V_T^2 - V_L^2}{2V_T^2 - V_L^2}$	$\rho(V_L^2 - \frac{4}{3}V_T^2)$

**Tabla 3.3.** Obtención de los módulos elásticos a partir de medidas de velocidad.

### 3.2.3.1. Velocidad de Fase y Grupo

Desde el punto de vista de la mecánica clásica, la velocidad se refiere a la traslación de un cuerpo de una posición a otra con respecto al tiempo transcurrido, sin embargo, en el campo de propagación de ondas se emplea los conceptos de velocidad de fase, velocidad

de grupo, así como también la velocidad de propagación de un frente de onda. A lo largo de esta sección se describen estas magnitudes y sus respectivas relaciones. En §3.2.3 se han presentado las ecuaciones de onda asociadas a dos modos de propagación independientes, ondas longitudinales y transversales. Unas posibles soluciones de tales ecuaciones de onda son los armónicos propagándose a lo largo del eje  $z$ , escritos como:

$$\Phi = \Phi_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad (3.2.34)$$

$$\Psi = \Psi_0 e^{i(\kappa z - \omega t)} \quad (3.2.35)$$

donde  $k$  y  $\kappa$  son el número de onda longitudinal y transversal, respectivamente,  $\omega = 2\pi f$  la frecuencia angular dada una frecuencia única  $f$ . Analizando sólo una solución de las ecuaciones de ondas, por ejemplo en función de  $\Phi$ , se pueden observar ciertas características de los parámetros de onda que la definen, como el número de onda que es inversamente proporcional a la longitud de onda ( $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ ); además al escribir a (3.2.34) como  $\Phi = \Phi_0 e^{i\varphi}$ , la fase  $\varphi$  del armónico conduce a la definición del concepto de *velocidad de fase*, expresado como:

$$V_\varphi = \left( \frac{dz}{dt} \right)_{\varphi=cte} = \frac{\omega}{k} = \lambda f \quad (3.2.36)$$

Esta magnitud se refiere a la propagación de un punto de fase constante, es decir, la traslación de un punto de la onda y no de la onda en si, pues la misma es de extensión infinita. Por otra parte, la velocidad de grupo de una onda es la velocidad con la que las variaciones en la forma de la amplitud de la onda, envolvente, se propagan en el espacio. La velocidad de grupo puede ser considerada como la velocidad en que la energía o información de la onda viaja. La relación entre las velocidades de fase y grupo, puede obtenerse como:

$$V_g = \frac{\partial(V_\varphi k)}{\partial k} = V_\varphi + k \frac{\partial V_\varphi}{\partial k} = V_\varphi + k \frac{\partial V_\varphi}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial k} = V_\varphi - \frac{2\pi}{k} \frac{\partial V_\varphi}{\partial \lambda} = V_\varphi - \lambda \frac{\partial V_\varphi}{\partial \lambda} \quad (3.2.37)$$

A partir de estas expresiones se observa que la velocidad de fase es la misma que la velocidad de grupo cuando son independientes de la longitud de onda, en caso contrario, se asocia el concepto de dispersión que hace referencia a la dependencia de estas magnitudes con la frecuencia, como se verá más adelante en §3.3.2. Por último, para ondas no continuas se puede definir la velocidad del frente de ondas  $V_{fp}$  como la velocidad con que se desplaza el inicio de la perturbación, que se iguala tanto con la velocidad de fase como con la de grupo siempre que sean independientes de la longitud de onda o frecuencia, en caso contrario corresponderá a la velocidad de la componente frecuencial más rápida.

### 3.3. Propagación de ondas en medios no homogéneos

Las leyes físicas que gobiernan el comportamiento de propagación de las ondas mecánicas en medios no homogéneos dependen principalmente de la descripción del medio en cuestión debido a la infinita variedad de materiales y medios heterogéneos. En este trabajo se considera que un medio no homogéneo puede ser cualquiera que presente inclusiones como granos del material y microgrietas, diferentes interfaces o discontinuidades, medios laminares, estructuras periódicas, o bien cualquier tipo de heterogeneidad en su estructura. Los materiales compuestos, como son los materiales cementicios, son un ejemplo de medio no homogéneo, que resulta de combinar dos o más constituyentes, fases, distinguibles físicamente y separables mecánicamente para optimizar alguna propiedad física del material diseñado. La dificultad de estudiar la propagación de ondas en medios no homogéneos, radica por tanto en las numerosas y distintas configuraciones de tamaño, fracción de volumen y distribución tridimensional en que están dispuestas las fases en el material compuesto. Cabe señalar que a la hora de caracterizar los materiales cementicios es necesario realizar una descripción tanto del material y de la interacción de las ondas que se propagan en él, como de las propiedades de las ondas propiamente dichas.

En esta sección se aborda una breve descripción, primero, de dos enfoques para el estudio de los medios no homogéneos, y posteriormente la explicación del concepto de dispersión que guarda una estrecha relación entre la longitud de onda (frecuencia) y las propiedades del medio heterogéneo.

#### 3.3.1. Homogeneización

En el estudio de los medios no homogéneos puede emplearse un proceso denominado *homogeneización*, que tiene como finalidad la estimación de las propiedades efectivas de un material compuesto constituido por una matriz, medio continuo homogéneo, y uno o más tipos de heterogeneidades situadas dentro del material. Por ejemplo, en el proceso de homogeneización se reemplaza la ley de Hooke por una ley efectiva de Hooke, expresada como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} \longrightarrow \bar{\sigma}_{ij} = \langle C_{ijkl} \rangle \bar{e}_{kl} \quad (3.3.1)$$

donde  $\langle C_{ijkl} \rangle$  es el tensor de constantes elásticas efectivas,  $\bar{\sigma}_{ij}$  y  $\bar{e}_{kl}$  son el esfuerzo y deformación promedio, respectivamente. De acuerdo con el proceso de homogeneización, la ecuación de movimiento de la onda con respecto al tensor de constantes efectivas puede expresarse como:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \longrightarrow \bar{\sigma}_{ij,j} = \langle \rho \rangle \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kl}] = \rho \ddot{u}_i \longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} [\langle C_{ijkl} \rangle \bar{e}_{kl}] = \langle \rho \rangle \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.3.3)$$

donde  $\langle \rho \rangle$  es la densidad efectiva del material compuesto. Las propiedades efectivas son definidas a partir de las propiedades y distribuciones de las diferentes fases que constituyen el material compuesto. Considerando un elemento de volumen representativo  $\mathbb{V}$  y masa total  $\mathbb{M}$ , formado por heterogeneidades y la matriz, el volumen y la masa del compuesto están descritos como:

$$\mathbb{V} = \mathbb{V}_1 + \sum_{r=2}^{N-1} \mathbb{V}_r = \sum_{r=1}^N \mathbb{V}_r \quad (3.3.4)$$

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}_1 + \sum_{r=2}^{N-1} \mathbb{M}_r = \sum_{r=1}^N \mathbb{M}_r \quad (3.3.5)$$

donde  $r = 1$  indica las propiedades de la matriz, y  $r = 2, \dots, N-1$  se refiere a las propiedades de los distintos  $N - 1$  tipos de heterogeneidades o inclusiones. Por otra parte, la fracción volumen total  $\phi$  del compuesto, viene dado por:

$$\phi = \sum_{r=1}^N \frac{\mathbb{V}_r}{\mathbb{V}} \quad (3.3.6)$$

Por tanto, la densidad efectiva del material compuesto se determina como:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\mathbb{M}}{\mathbb{V}} = \sum_{r=1}^N \frac{\rho_r \mathbb{V}_r}{\mathbb{V}} = \phi_1 \rho_1 + \sum_{r=2}^{N-1} \phi_r \rho_r = \sum_{r=1}^N \phi_r \rho_r \quad (3.3.7)$$

donde  $\phi_r$  indica las respectivas fracciones de volumen para  $r = 1, \dots, N$ .

### 3.3.1.1. Tipos de homogeneización

La modelización del comportamiento efectivo de los materiales compuestos puede ser abordado desde dos enfoques (Parnell, 2006): (i) *modelos micromecánicos* (homogeneización estática), y (ii) *modelos de dispersión acústica* (homogeneización dinámica). En la homogeneización estática se estiman las propiedades efectivas mediante las propiedades y distribución geométrica de las fases que constituyen el medio compuesto. La micromecánica se entiende como una extensión de la teoría de la elasticidad y de la mecánica de los



sólidos deformables aplicada al estudio de la microestructura de los materiales compuestos. Los métodos más notables que estiman las propiedades elásticas efectivas de materiales compuestos, desde el enfoque estático o cuasi-estático, ha sido resumidos en (Ahmed y Jones, 1990; Hernández, 2002; Watt, 1976; Yaman et al, 2002) quienes hacen un estudio comparativo principalmente de los modelos de (Hashin y Shtrikman, 1962, 1963), (Walpole, 1969), (Hill, 1963, 1965), (Budiansky, 1965), (Kuster y Toksöz, 1974), (Berryman, 1980), (Hernández et al, 2006a,b). En el anexo A se da una breve descripción de los modelos de este tipo que serán referidos a lo largo de la presente tesis. Por otro lado, la homogeneización dinámica caracteriza las propiedades de los materiales cuando se aplica a éstos una excitación dependiente del tiempo, generalmente de naturaleza armónica. Desde este punto de vista, han de considerarse dos cuestiones: la dispersión múltiple que existe entre las inclusiones o heterogeneidades que están suspendidas en la matriz del material compuesto, y la dependencia frecuencial de las propiedades efectivas del material homogeneizado. Este último enfoque es el empleado en la presente investigación; en la siguiente sección iniciamos la descripción del concepto de dispersión, así como los conceptos físicos involucrados.

#### 3.3.2. Concepto de Dispersión

En §3.2.3.1 se ha definido las velocidades de fase, grupo y del frente de ondas, magnitudes que son iguales y constantes para medios homogéneos, denominados también medios no dispersivos. Para el caso de medios no homogéneos, la velocidad de fase y de grupo son distintas en estos medios debido al efecto de dispersión <sup>2</sup>, y dependen a su vez de la frecuencia o longitud de onda. El fenómeno de dispersión establece que las ondas que se propagan a diferentes frecuencias tendrán diferentes velocidades. Asimismo, los parámetros principales que describen la propagación de una onda en un medio no homogéneo puede ser caracterizados mediante una apropiada *relación de dispersión*. Estas relaciones pueden ser expresadas en función de la frecuencia angular y del número de onda:

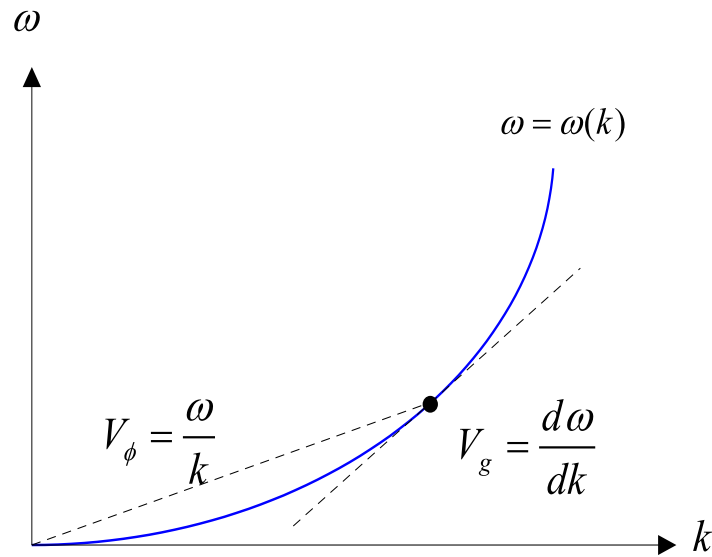
$$k = k(\omega) \quad (3.3.8)$$

$$\omega = \omega(k) \quad (3.3.9)$$

Una gráfica en función de  $\omega - k$  es la llamada curva de dispersión, como se muestra en

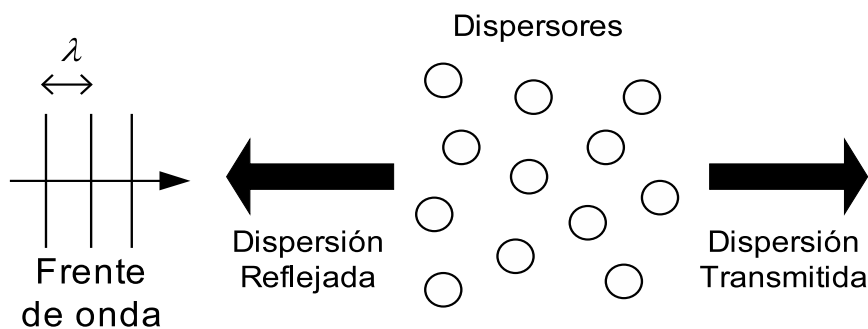
---

<sup>2</sup>La traducción de dispersión al inglés puede ocasionar ciertas confusiones, es decir, cuando se refiere a la dispersión debida a inclusiones se emplea *scattering*, mientras que *dispersion* se refiere a que las características de una onda puedan variar con la frecuencia, por ejemplo la velocidad de fase. A lo largo de la tesis se denominará dispersión tanto para la traducción de *dispersion* como de *scattering* basándose en que cualquiera de los dos casos sean identificados según el contexto de lo enunciado.



**Figura 3.1.** Curva de Dispersión.

la Figura 3.1; la pendiente de una línea desde cualquier punto al origen es la velocidad de fase (pendiente de la secante), mientras que la pendiente de la tangente en un punto es la velocidad de grupo. Una curva de dispersión debido a la propagación de una onda en un medio no dispersivo está representada por una línea recta desde el origen, en otro caso, se considera que la onda se propaga en un medio dispersivo. Por otra parte, la propagación de una onda, experimenta una dispersión de su energía hacia todas las direcciones debido a las heterogeneidades o inclusiones del medio no homogéneo. La cantidad de energía dispersada está en función del tamaño de las inclusiones y la longitud de onda. La energía dispersada que conserva el mismo sentido de propagación que la onda incidente se le denomina dispersión transmitida, mientras que la energía que posee un sentido contrario al incidente se le denomina dispersión reflejada como se muestra en la Figura 3.2.



**Figura 3.2.** Tipos de Energía Dispersada.

### 3.3.3. Número de onda complejo

En la sección anterior se estableció la relación entre la velocidad de fase y el número de onda, sin embargo, esta relación de dispersión es válida para un medio considerando como no atenuante. A continuación se introduce el concepto del número de onda complejo que permite establecer una relación entre la propagación de una onda en un medio atenuante. Una onda de esfuerzo longitudinal  $\sigma$  con amplitud inicial  $\sigma_0$  que viaje en dirección al eje  $z$  en un medio arbitrario, homogéneo o heterogéneo, que sea considerado como atenuante, puede ser expresada como:

$$\sigma = \sigma_0 e^{i[k(\omega)z - \omega t]} \quad (3.3.10)$$

donde  $k(\omega)$  es el número de onda complejo longitudinal que depende de la frecuencia y cuya expresión está dada por:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{V_L(\omega)} + i\alpha_L(\omega) \quad (3.3.11)$$

donde  $\alpha_L(\omega)$  es el término correspondiente a la atenuación de la onda longitudinal dependiente de la frecuencia. En un medio homogéneo  $k$ ,  $V_L$  y  $\alpha_L$  son independientes de la frecuencia. De forma análoga también puede describirse el número de onda complejo transversal  $\kappa(\omega)$ , como:

$$\kappa(\omega) = \frac{\omega}{V_T(\omega)} + i\alpha_T(\omega) \quad (3.3.12)$$

donde  $\alpha_T(\omega)$  es el término correspondiente a la atenuación de la onda transversal dependiente de la frecuencia.

### 3.3.4. Atenuación dependiente de la frecuencia

La atenuación es debida principalmente a dos mecanismos de distinto índole: la atenuación por absorción  $\alpha_{ab}$  y la atenuación por dispersión  $\alpha_{sc}$ . La primera se refiere principalmente a la pérdida de energía por efectos termo-elásticos en el material, mientras que la segunda corresponde a la pérdida de la energía por la transmisión y reflexión del frente de pulsos en incidencia con las heterogeneidades del material (véase Figura 3.2). La contribución de estos mecanismos sobre la atenuación total  $\alpha$ , puede expresarse como:

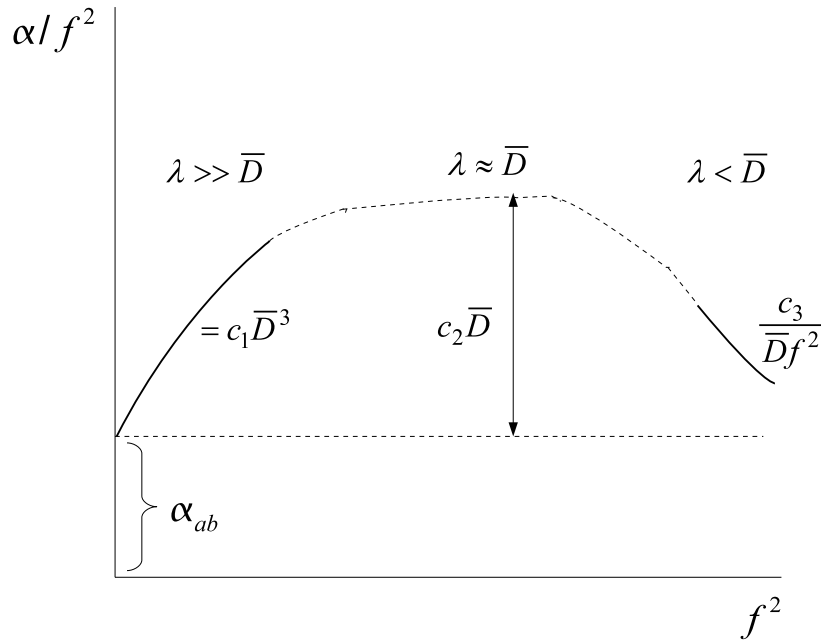
$$\alpha = \alpha_{ab} + \alpha_{sc} \quad (3.3.13)$$

Uno de los principales resultados expuestos en (Mason y McSkimin, 1947; Smith, 1987; Stanke y Kino, 1984) muestra que el coeficiente de atenuación dependiente de la frecuencia  $\alpha(\omega)$  ( $\alpha(f)$ ) está en función del tamaño de los reflectores con respecto a la longitud de

onda. Reynolds y Smith (1984) establecieron diferentes regiones que son definidas según la relación existente entre el diámetro medio de los granos en el material  $\bar{D}$  y la longitud de onda  $\lambda$  como:

$$\alpha_{sc}(f) = \begin{cases} c_1 \bar{D}^3 f^4 & \lambda \gg \bar{D}, & \text{Región de Rayleigh} \\ c_2 \bar{D} f^2 & \lambda \simeq \bar{D}, & \text{Región Estocástica} \\ \frac{c_3}{\bar{D}}, & \lambda < \bar{D} & \text{Región de Difusión o Geométrica} \end{cases} \quad (3.3.14)$$

donde  $c_1, c_2, c_3$  son constantes que dependen del material. Además, en el análisis se incluye un cuarto término correspondiente a la atenuación por absorción,  $\alpha_{ab} = c_4 f^2$ , donde  $c_4$  es otra constante que depende del material. En la Figura 3.3 se muestra una gráfica de la atenuación dependiente de la frecuencia representada en las tres regiones de estudio.



**Figura 3.3.** Dependencia de la atenuación con respecto a la frecuencia y el tamaño del dispersor.

Sin embargo, hay que puntualizar que en estos trabajos se realizaron las pruebas sobre materiales metálicos y aleaciones como el acero, pero en el estudio de la dependencia frecuencial de la atenuación se han mantenido los nombres de las regiones definidas según la relación diámetro-longitud de onda. Basándose en este criterio, la dependencia frecuencial de la atenuación para diferentes materiales puede ser modelada como una función exponencial, expresada como:

$$\alpha(\omega) = c_\gamma \omega^\gamma \quad (3.3.15)$$

donde  $c_\gamma$  es una constante dependiente del material, y el exponente  $\gamma \in \mathbb{R}$  y está comprendido en un rango  $1 \leq \gamma \leq 4$ ; en términos generales este tipo de modelado se refiere a la atenuación como una función de la frecuencia y tamaño de los dispersores, como:

$$\alpha(\omega, f(D)) = \alpha_{ab}(\omega) + \alpha_{sc}(\omega, f(D)) \quad (3.3.16)$$

donde  $f(D)$  puede ser una distribución de tamaños de los dispersores, o un tamaño medio. No obstante, este tipo de modelado no proporciona una relación directa entre el tamaño, fracción volumétrica y propiedades de los dispersores o inclusiones embebidos en un material con respecto a la atenuación. Esto motiva el estudio y desarrollo de modelos que puedan describir la dependencia frecuencial de la atenuación en términos de las propiedades de los constituyentes de un material no homogéneo, como es el caso de la presente tesis.

En el siguiente capítulo se abordará el desarrollo de un modelo dinámico autoconsistente N-fásico para la caracterización de materiales heterogéneos mediante la dispersión múltiple de ondas ultrasónicas. Este modelo es capaz de proporcionar el número de onda complejo, que su vez depende de la velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia, en función de las propiedades elásticas de la matriz cementicia, de las propiedades elásticas, tamaño y fracción volumétrica de los agregados y el aire ocluido, que componen a un material cementicio.



---

## CAPÍTULO 4

# MODELOS N-FÁSICOS DE DISPERSIÓN MÚLTIPLE PARA LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS

---

*En este capítulo se describen los modelos de dispersión empleados a lo largo de la memoria. Se desarrolla la extensión del modelo dinámico autoconsistente (MDAC) para materiales N-fásicos. Asimismo, se hace un estudio teórico de la influencia de los parámetros microestructurales (tamaño y fracción de volumen de las inclusiones) en materiales cementicios con respecto a la velocidad de fase y atenuación empleando el MDAC N-fásico.*

### 4.1. Introducción

Como se ha explicado en el capítulo anterior, la propagación de ondas en medios no homogéneos puede ser descrita, en términos generales, mediante la velocidad de fase y atenuación dependientes de la frecuencia. Estos parámetros a su vez, son la parte real e imaginaria del número de onda complejo  $k(\omega)$ , respectivamente. Asimismo, esta dependencia frecuencial es consecuencia directa de la dispersión producida por las heterogeneidades presentes en el medio. La dispersión debida a inclusiones puede ser estudiada, según la concentración e interacción de las mismas, por la dispersión simple y la dispersión múltiple. La dispersión simple considera la contribución individual de cada una de las inclusiones y la onda propagada, por lo que la dispersión total es la suma de éstas. Este proceso sólo es válido cuando la concentración de inclusiones es baja y es comúnmente denominada como dispersión débil. Por otro lado, la dispersión múltiple, que es el caso estudiado en el presente trabajo, considera la dispersión debido a una inclusión y la contribución de ésta con las demás inclusiones, y así sucesivamente. Asimismo, en el presente trabajo y debido a la forma de la mayoría de las inclusiones del material bajo estudio, las heterogeneidades se van a considerar esféricas, aunque gran parte de la formulación se podría desarrollar de manera equivalente para otro tipo de geometría de las heterogeneidades.

A continuación se da una breve reseña de los modelos más representativos en la literatura asociados a la dispersión múltiple y sus resultados.

Foldy (1945) fue el primero en realizar un estudio formal de la dispersión múltiple de ondas debido a una distribución aleatoria de inclusiones en un medio arbitrario, bajo el análisis de la ecuación de onda en su representación escalar. Asimismo, introdujo el concepto de promediado configuracional que es la base para el desarrollo de las teorías de dispersión múltiple, por lo que los trabajos posteriores son la continuación y expansión de las ideas que contiene dicha investigación. Posteriormente, Lax (1951, 1952) y Twersky (1962a,b) generalizaron el estudio de Foldy al incluir propiedades y características más generales de diferentes tipos de inclusiones y clases de dispersión.

Waterman y Truell (1961) fueron quienes incluyeron en la teoría de dispersión múltiple la contribución de la dispersión de la onda reflejada. Este artículo da los cimientos para el estudio de la teoría de dispersión múltiple tomando en cuenta tanto la dispersión transmitida como la reflejada. Adicionalmente, Lloyd y Berry (1967) complementaron esta teoría. Estos modelos han sido utilizados ampliamente por muchos investigadores y se han basado en ellos para el desarrollo de otros modelos, con el fin de describir la propagación de ondas en medios no homogéneos bifásicos. Se citan a continuación los más representativos.

Bose y Mal (1973a,b) presentaron la teoría de propagación de ondas elásticas en materiales compuestos por fibras. Brill y Gaunaurd (1987) establecieron la teoría de resonancia por dispersión (*resonance scattering theory*), que estudia el comportamiento resonante generado por las inclusiones debido a los distintos valores de densidad que pueden presentarse entre una matriz elástica y diferentes tipos de dispersores (inclusiones esféricas rellenas de fluido, cavidades y esferas rígidas). Challis et al (1998) presentaron un estudio sobre la equivalencia entre tres distintos enfoques de modelos de dispersión desarrollados por Ying y Truell (1956), Epstein y Carhart (1953), como también el de Allegra y Hawley (1972). Anson y Chivers (1989, 1993) presentaron una comparación entre doce modelos teóricos de dispersión para estimar la velocidad ultrasónica en materiales compuestos (epoxy con diferentes agregados). En sus conclusiones sólo cuatro modelos fueron capaces de predecir propiedades dinámicas: el modelo WT, el modelo incremental de Beltzer y Brauner (1987, 1989), el modelo de Kerr (1992a,b) y el modelo autoconsistente de Sabina y Willis (1988). De cualquier forma, el modelo WT ha sido uno de los modelos más usados en el estudio de la dispersión múltiple. Sin embargo, debido a la limitación de baja concentración de disper-



sores del modelo WT, se han realizado diversos estudios para solucionar este inconveniente, destacando; una formulación autoconsistente del modelo WT propuesta en (Sayers, 1980; Sayers y Smith, 1982) y el método de aproximación iterativa del medio efectivo formulado por Aggelis et al (2004) basado en la aproximación del medio efectivo (Tsinopoulos et al, 2000; Verbis et al, 2001) y las condiciones de autoconsistencia dadas por Kim et al (1995).

Por otro parte, Yang desarrolló un método llamado *modelo dinámico generalizado auto-consistente*, que considera altas concentraciones de éstos para el caso de materiales bifásicos tanto para inclusiones cilíndricas (Yang y Mal, 1994) como para esféricas (Yang, 2003). En cuanto a la validación de este modelo, Layman et al (2006) realizaron experimentos para medir la atenuación y velocidad ultrasónica en función de la frecuencia usando una resina epoxy con agregados esféricos de vidrio, utilizando dos métodos de modelado: el modelo WT, y el modelo dinámico autoconsistente de Yang. Ambos modelos funcionaron satisfactoriamente para los casos de baja concentración de inclusiones. De acuerdo con sus resultados, el modelo dinámico autoconsistente concuerda más con la información de la atenuación que el modelo WT que va perdiendo precisión al aumentar la concentración de inclusiones. En el caso de la velocidad, estos modelos proporcionan una información con errores inferiores del 3 %. Aunque podríamos mencionar un sin número de trabajos dedicados al estudio de la velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia en materiales bifásicos cerámicos, metálicos, poliméricos, suspensiones y emulsiones, no obstante, siguen siendo escasas las contribuciones con respecto a la predicción de dichos parámetros mediante modelos de dispersión en materiales cementicios como se mencionó en el primer capítulo de la presente tesis. Uno de los trabajos más representativos es el desarrollado por (Aggelis y Philippidis, 2004; Aggelis et al, 2005) en el cual hace un estudio tanto teórico, empleando el modelo WT N-fásico expuesto por McClements (1996, 2000), como experimental del comportamiento de la dispersión y atenuación en mortero fresco usando mediciones ultrasónicas en configuración de transmisión. Estos trabajos han expuesto que el modelo WT es capaz de predecir la información de velocidad de fase y atenuación del frente de onda ultrasónico en materiales cementicios, sin embargo, este modelo va perdiendo precisión al aumentar la concentración de los agregados.

Para la predicción de las propiedades efectivas así como la velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia en materiales cementicios, es necesario contar con un modelo N-fásico, que además, sea válido para altas concentraciones de agregados. Lo anterior, es una de las principales motivaciones de este trabajo de tesis, de tal forma que se propone la

extensión del modelo dinámico autoconsistente (MDAC) para materiales multifase tomando en cuenta únicamente la incidencia de una onda longitudinal. A continuación se describe el modelo de Waterman-Truell N-fásico que da los cimientos para el desarrollo de MDAC N-fásico.

#### 4.2. Modelo de Waterman-Truell

Waterman y Truell (1961), empleando el concepto de promediado configuracional, obtuvieron una relación entre el número de onda complejo y las amplitudes de dispersión transmitidas y reflejadas, que a su vez están en función de unos coeficientes llamados de dispersión considerando  $n(\mathbf{r})$  dispersores por unidad de volumen, es decir,  $N$  dispersores idénticos con vectores de posición  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ . En este desarrollo, que por su extensión se recomienda revisar la referencia original, considera un medio homogéneo e isotrópico que sea capaz de sostener una propagación de una onda longitudinal descrita por la ecuación escalar de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad (4.2.1)$$

donde la constante de propagación o número de onda  $k$  puede ser una cantidad real o compleja; el número de onda será complejo cuando exista disipación en el medio (matriz). En el medio de propagación están incluidos los  $N$  dispersores que bajo la influencia de una onda incidente  $\Phi_{inc}(\mathbf{r})$  se genera una onda dispersada  $\Phi_{sc}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  debido al dispersor  $j$  con respecto a los demás dispersores. Además, se asume que las propiedades de los dispersores son conocidas así como la existencia de una relación entre el campo de excitación  $\Phi_E(\mathbf{r}|\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$  actuando sobre el dispersor  $j$ . Esta relación define un operador lineal  $\mathcal{T}$  como sigue:

$$\Phi_{sc}(\mathbf{r}|\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \equiv \mathcal{T}(\mathbf{r}_j)\Phi_E(\mathbf{r}|\mathbf{r}_j; \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) \quad (4.2.2)$$

Así, el campo promedio total puede aproximarse como:

$$\langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle = \Phi_{inc}(\mathbf{r}) + \int_V n(\mathbf{r}')\mathcal{T}(\mathbf{r}')\langle \Phi_E(\mathbf{r}|\mathbf{r}'; \mathbf{r}') \rangle d\tau' \quad (4.2.3)$$

donde  $d\tau'$  es un elemento de volumen en  $\mathbf{r}'$ . Por tanto, la respuesta de los  $j$ -ésimos dispersores puede ser obtenida a partir del campo total dado el dispersor  $j$  que consiste tanto de la onda incidente como de la onda reflejada debido a los demás dispersores. Asimismo, tal formulación asume que la distribución de las inclusiones es estadísticamente independiente:  $p(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_j \dots \mathbf{r}_N) = p(\mathbf{r}_1)p(\mathbf{r}_2) \dots p(\mathbf{r}_j) \dots p(\mathbf{r}_N)$ , donde la probabilidad  $p(\mathbf{r}_j)$  del dispersor  $j$ , con vector de posición  $\mathbf{r}_j$  es independiente de los otros dispersores.

De acuerdo con lo expuesto anteriormente y realizando un extensivo tratamiento de la ecuación (4.2.3), el campo promedio longitudinal  $\langle \Phi(\mathbf{r}) \rangle = \Phi_0 e^{i\langle k \rangle \cdot \mathbf{r}}$  queda descrito por el número de onda efectivo o equivalente promedio  $\langle k(\omega) \rangle = \frac{\omega}{\langle V_L(\omega) \rangle} + i\langle \alpha_L(\omega) \rangle$  que está en función de la velocidad de fase y atenuación total efectiva dependiente de la frecuencia.  $\langle k(\omega) \rangle$  es calculado en términos del número de dispersores por volumen  $n_0$ , o fracción de volumen de las inclusiones  $\phi$ , y de la contribución en amplitud de la dispersión transmitida  $f(\theta = 0)$  y reflejada  $f(\theta = \pi)$  en el campo lejano. La solución del problema de dispersión de una onda plana longitudinal afectada por inclusiones esféricas de radio  $a$  situadas dentro de una matriz con número de onda  $k_1$  puede expresarse de dos formas como son normalmente encontradas en la literatura:

$$\left( \frac{\langle k(\omega) \rangle}{k_1} \right)^2 = \left( 1 + \frac{2\pi n_0 f(0)}{k_1^2} \right)^2 - \left( \frac{2\pi n_0 f(\pi)}{k_1^2} \right)^2 \quad (4.2.4)$$

$$\left( \frac{\langle k(\omega) \rangle}{k_1} \right)^2 = 1 + \frac{3\phi}{k_1^2 a^3} f(0) + \frac{9\phi^2}{4k_1^4 a^6} \left( f^2(0) - f^2(\pi) \right) \quad (4.2.5)$$

donde la relación entre número de dispersores por unidad de volumen y la fracción de volumen está dada por  $n_0 = \frac{3\phi}{4\pi a^3}$  para inclusiones esféricas. Las amplitudes  $f(0)$  y  $f(\pi)$  son calculadas como:

$$f(0) = \frac{1}{ik_1} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \mathcal{A}_n^* \quad (4.2.6)$$

$$f(\pi) = \frac{1}{ik_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \mathcal{A}_n^* \quad (4.2.7)$$

donde  $\mathcal{A}_n$  son los coeficientes de dispersión para las ondas longitudinales. Aquí, el símbolo  $*$  indica el conjugado de  $\mathcal{A}_n$  debido a la convención de signos que se emplea en este trabajo para su obtención (véase más adelante §4.2.1). El coeficiente  $\mathcal{A}_n$  está en función tanto de las propiedades de la matriz como de las inclusiones, principalmente de  $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(k_1, k_2, \mu_1, \mu_2, \omega)$ , donde  $k_2$  es el número de onda de la inclusión,  $\omega$  es la frecuencia angular,  $\mu_1$  y  $\mu_2$  los módulos transversales de la matriz y la inclusión, respectivamente. Además este coeficiente ha de obtenerse para  $n = 0, 1, 2, \dots$ , sin embargo esta tarea sería imposible. A medida que aumenta el orden  $n$ , el coeficiente tiende a cero, entonces puede operarse la suma de forma finita y el valor de  $n$  dependerá de los valores de las propiedades de la matriz y de las inclusiones. Cabe señalar que Waterman y Truell definieron un criterio para garantizar la validez de (4.2.5) en función de la sección transversal de dispersión  $\gamma^{sca}$ ,

según:

$$\frac{n_0 \gamma^{sca}}{k_1} \ll 1 \quad (4.2.8)$$

donde

$$\gamma^{sca} = \frac{4\pi}{k_1} \text{Im} f(0) \quad (4.2.9)$$

Este criterio, ecuación (4.2.8), siempre se cumple para la dispersión producida en la región de Rayleigh,  $k_1 a \ll 1$ . El modelo WT puede generalizarse para una distribución de diferentes tamaños a partir de la formulación para un único tamaño. En este caso, el número de onda complejo para una distribución de tamaños de inclusión puede ser calculado como:

$$\left( \frac{\langle k(\omega) \rangle}{k_1} \right)^2 = \left( 1 + \frac{2\pi n_0}{k_1^2} \langle f(0) \rangle \right)^2 - \left( \frac{2\pi n_0}{k_1^2} \langle f(\pi) \rangle \right)^2 \quad (4.2.10)$$

donde  $\langle f(\theta) \rangle = \int p(\beta) f(\theta; \beta) d\beta$  es la amplitud de dispersión en el campo lejano promediada sobre una cierta distribución de inclusiones  $p(\beta)$ . Esta expresión también puede extenderse para distintos tipos de inclusiones y distribución de tamaños, tal como lo propuso McClements (1996, 2000):

$$\left( \frac{\langle k(\omega) \rangle}{k_1} \right)^2 = 1 + \frac{3}{k_1^2} \sum_j \frac{\phi_j}{a_j^3} f_j(0) + \frac{9}{4k_1^4} \sum_j \frac{\phi_j^2}{a_j^6} \left( f_j^2(0) - f_j^2(\pi) \right) \quad (4.2.11)$$

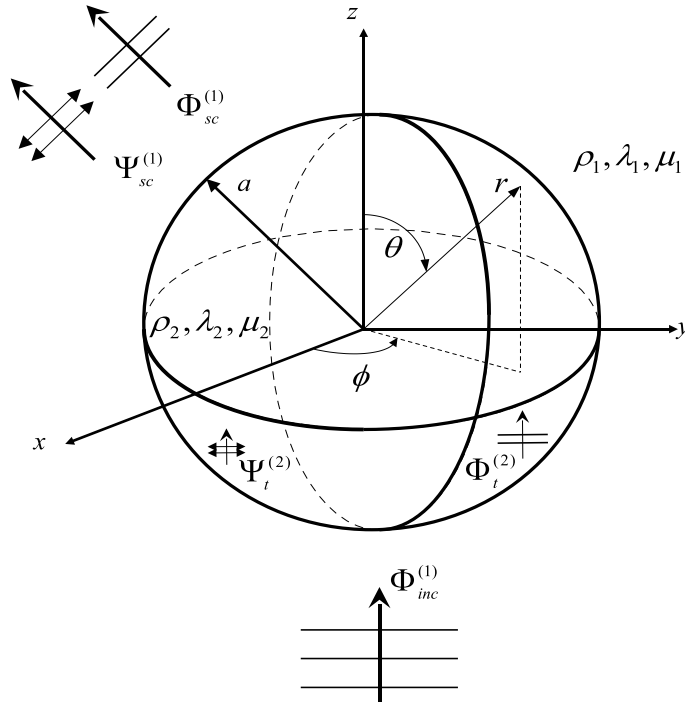
donde  $\phi_j$  y  $a_j$  son la fracción de volumen y radio de cada una de las diferentes  $j$  especies de inclusiones a considerar en el material compuesto, respectivamente. De igual forma,  $f_j(0)$  y  $f_j(\pi)$  son las amplitudes de dispersión transmitida y reflejadas, respectivamente, que dependen a su vez de los coeficientes  $\mathcal{A}_{n,j}$  que son obtenidos según las propiedades mecánicas y condiciones de contorno de las diferentes  $j$  especies de inclusiones, quedando así expuesto que la expresión (4.2.11) requiere del conocimiento de los coeficientes de dispersión para los distintos tipos de inclusiones (elásticas, fluido o cavidades) que pueden estar presentes en un medio o material compuesto.

#### 4.2.1. Dispersión de ondas longitudinales por una inclusión esférica elástica sólida

La formulación de expresiones para el cálculo de los coeficientes de dispersión ha sido abordado por numerosos investigadores, siendo los más importantes las publicadas por (Ying y Truell, 1956) con respecto a ondas incidentes longitudinales, (Einspruch y Truell, 1960) para ondas incidentes transversales, o bien, tomando en cuenta ambas ondas incidentes simultáneas como se formuló en (Brill y Gaunaurd, 1987; Norris, 1986). En esta sección,

se emplea la misma formulación dada por Pao y Mow (1963) y Graff (1991), pero cabe señalar que aquí la onda incidente es de amplitud unitaria ( $\Phi_0 = 1$ ), y con el fin de utilizar las expresiones (4.2.4) o (4.2.5) sin ningún cambio se aplica el conjugado a los respectivos coeficientes de dispersión.

Sea una onda plana longitudinal propagándose a lo largo de la dirección  $z^+$  en un medio elástico 1 e incidiendo sobre una inclusión considerada como una esfera elástica de radio  $a$ . Como consecuencia de esta incidencia se generan un par de ondas longitudinales y transversales “reflejadas” o dispersadas, y otro par de ondas longitudinales y transversales transmitidas hacia el interior de la esfera (medio 2), como se ilustra en la Figura 4.1.



**Figura 4.1.** Esquema de las ondas reflejadas y transmitidas debido a una inclusión esférica embebida en un medio homogéneo para el caso de una onda longitudinal incidente.

Las propiedades de la matriz son indicadas por el subíndice 1 ( $\rho_1, \lambda_1$  y  $\mu_1$ ), mientras que las correspondientes a las inclusiones por el subíndice 2 ( $\rho_2, \lambda_2$  y  $\mu_2$ ). Las ondas generadas pueden expresarse en función de los potenciales anteriormente descritos en §3.2.3, donde la onda longitudinal incidente (medio 1) se escribe como:

$$\Phi_{inc}^{(1)} = \Phi_0 e^{i(k_1 z \cos \theta - \omega t)} \quad (4.2.12)$$

donde  $k_1 = \frac{\omega}{V_{L1}}$  es el número de onda longitudinal en el medio 1. Tomando en cuenta la siguiente expansión:

$$e^{ik_1 z \cos \theta} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k_1 r) P_n(\cos \theta) \quad (4.2.13)$$

Los potenciales incidentes  $\Phi_{inc}^{(1)}, \Psi_{inc}^{(1)}$  en el medio 1 están dados por:

$$\Phi_{inc}^{(1)} = \Phi_0 e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(k_1 r) P_n(\cos \theta), \quad \Psi_{inc}^{(1)} = 0 \quad (4.2.14)$$

Mientras que los potenciales de las ondas reflejadas o dispersadas  $\Phi_{sc}^{(1)}, \Psi_{sc}^{(1)}$ , así como también los transmitidos hacia el medio 2,  $\Phi_t^{(2)}, \Psi_t^{(2)}$ , pueden escribirse como:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{sc}^{(1)} \\ \Psi_{sc}^{(1)} \end{pmatrix} = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n h_n(k_1 r) \\ \mathcal{B}_n h_n(\kappa_1 r) \end{pmatrix} P_n(\cos \theta) \quad (4.2.15)$$

$$\begin{pmatrix} \Phi_t^{(2)} \\ \Psi_t^{(2)} \end{pmatrix} = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \begin{pmatrix} \mathcal{C}_n j_n(k_2 r) \\ \mathcal{D}_n j_n(\kappa_2 r) \end{pmatrix} P_n(\cos \theta) \quad (4.2.16)$$

donde  $\kappa_1 = \frac{\omega}{V_{T1}}$  el número de onda transversal del medio 1,  $k_2 = \frac{\omega}{V_{L2}}$  y  $\kappa_2 = \frac{\omega}{V_{T2}}$  son los números de onda longitudinal y transversal del medio 2, respectivamente;  $j_n$  y  $h_n$  son las funciones esféricas de Bessel y Hankel de primera especie y orden  $n$ , y  $P_n = P_n(\cos \theta)$  son los polinomios de Legendre de orden  $n$ . Las expresiones que contienen la función  $j_n$  son las correspondientes a las ondas incidentes o transmitidas, mientras que las que contienen  $h_n$  son asociadas a las dispersadas (Graff, 1991; Morse y Feshbach, 1953). Los coeficientes de expansión de onda o de dispersión  $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_n$  y  $\mathcal{D}_n$  son determinados por las condiciones de contorno cuando  $r = a$ . Las componentes genéricas del vector de desplazamiento  $\mathbf{u}$ , y los elementos radiales del tensor de esfuerzo  $\sigma_{ij}$  pueden escribirse en términos de los potenciales  $\Phi$  y  $\Psi$ , como sigue (Graff, 1991):

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} (D_\theta \Psi) \quad (4.2.17)$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \Psi) \right] \quad (4.2.18)$$

$$\sigma_r = \frac{2\mu}{r^2} \left[ r D_\theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\kappa^2 r^2}{2} \Phi - D_\theta \Phi - 2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - D_\theta \Psi \right] \quad (4.2.19)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Phi + \left( \frac{\kappa^2 r^2}{2} + 1 \right) \Psi + D_\theta \Psi + r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \quad (4.2.20)$$

donde  $D_\theta = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right)$ .

La onda total en el medio 1 es la superposición de la onda incidente y reflejada, mientras que en el medio 2 solo se considera la onda transmitida, que en función de los potenciales, se expresa:

$$\Phi_1 = \Phi_{inc}^{(1)} + \Phi_{sc}^{(1)}; \quad \Psi_1 = \Psi_{sc}^{(1)}; \quad \Phi_2 = \Phi_t^{(2)}; \quad \Psi_2 = \Psi_t^{(2)} \quad (4.2.21)$$

A continuación se muestra el desarrollo realizado para obtener las componentes de los vectores de desplazamiento y esfuerzo de acuerdo a lo expresado anteriormente, se omite el término dependiente del tiempo  $e^{-i\omega t}$ , por simplicidad en el análisis:

Para  $u_r^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} u_r^{(1)} &= \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} (D_\theta \Psi) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 j_n(k_1 r) + \mathcal{A}_n h_n(k_1 r) \right\} P_n + \frac{1}{r} D_\theta \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \mathcal{B}_n h_n(\kappa_1 r) P_n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \left[ \Phi_0 k_1 j'_n(k_1 r) + k_1 \mathcal{A}_n h'_n(k_1 r) \right] + \frac{1}{r} \mathcal{B}_n h_n(\kappa_1 r) D_\theta \right\} P_n \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

Tomando en cuenta que  $D_\theta P_n = -n(n+1)P_n$ :

$$u_r^{(1)} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \left[ \Phi_0 (k_1 r) j'_n(k_1 r) + (k_1 r) h'_n(k_1 r) \mathcal{A}_n \right] - n(n+1) h_n(\kappa_1 r) \mathcal{B}_n \right\} P_n \quad (4.2.23)$$

Para  $u_\theta^{(1)}$ :

$$\begin{aligned} u_\theta^{(1)} &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\partial}{\partial\theta} \frac{\partial}{\partial r} (r\Psi) \right] \\ &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 j_n(k_1 r) + h_n(k_1 r) \mathcal{A}_n - \left[ (\kappa_1 r) h'_n(\kappa_1 r) + h_n(\kappa_1 r) \right] \mathcal{B}_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial\theta} \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Para  $\sigma_r^{(1)}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(1)} &= \frac{2\mu_1}{r^2} \left[ r D_\theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2} \Phi - D_\theta \Phi - 2r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - D_\theta \Psi \right] \\ &= \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 \left[ \left( n^2 + n - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2} \right) j_n(k_1 r) + 2(k_1 r) j'_n(k_1 r) \right] + \right. \\ &\quad \left. \left[ \left( n^2 + n - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2} \right) h_n(k_1 r) + 2(k_1 r) h'_n(k_1 r) \right] \mathcal{A}_n + n(n+1) [h_n(k_1 r) - (\kappa_1 r) h'_n(k_1 r)] \mathcal{B}_n \right\} P_n \quad (4.2.25)\end{aligned}$$

Para  $\sigma_{r\theta}^{(1)}$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^{(1)} &= \frac{2\mu_1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ r \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \Phi + \left( \frac{\kappa_1^2 r^2}{2} + 1 \right) \Psi + D_\theta \Psi + r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \\ &= \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 [(k_1 r) j'_n(k_1 r) - j_n(k_1 r)] + [(k_1 r) h'_n(k_1 r) - h_n(k_1 r)] \mathcal{A}_n + \right. \\ &\quad \left. [(\kappa_1 r) h'_n(\kappa_1 r) - \left( n^2 + n - 1 - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2} \right) h_n(\kappa_1 r)] \mathcal{B}_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.2.26)\end{aligned}$$

De forma similar las componentes de desplazamiento y esfuerzo para el medio 2 vienen dadas por:

$$u_r^{(2)} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ [(k_2 r) j'_n(k_2 r) \mathcal{C}_n] - n(n+1) j_n(\kappa_2 r) \mathcal{D}_n \right\} P_n \quad (4.2.27)$$

$$u_\theta^{(2)} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ j_n(k_2 r) \mathcal{C}_n - [(\kappa_2 r) j'_n(\kappa_2 r) + j_n(\kappa_2 r)] \mathcal{D}_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.2.28)$$

$$\begin{aligned}\sigma_r^{(2)} &= \frac{2\mu_2}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \left[ \left( n^2 + n - \frac{\kappa_2^2 r^2}{2} \right) j_n(k_2 r) + 2(k_2 r) j'_n(k_2 r) \right] \mathcal{C}_n + \right. \\ &\quad \left. n(n+1) [j_n(\kappa_2 r) - (\kappa_2 r) j'_n(\kappa_2 r)] \mathcal{D}_n \right\} P_n \quad (4.2.29)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta}^{(2)} &= \frac{2\mu_2}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ [(k_2 r) j'_n(k_2 r) - j_n(k_2 r)] \mathcal{C}_n + \right. \\ &\quad \left. [(\kappa_2 r) j'_n(\kappa_2 r) - \left( n^2 + n - 1 - \frac{\kappa_2^2 r^2}{2} \right) j_n(\kappa_2 r)] \mathcal{D}_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.2.30)\end{aligned}$$



Las ecuaciones (4.2.23)-(4.2.30), pueden escribirse en función de coeficientes  $\varepsilon_{ij}$ , que son combinaciones lineales de los armónicos esféricos, como sigue:

$$u_r^{(1)} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 \varepsilon_{11} + \mathcal{A}_n \varepsilon_{11} + \mathcal{B}_n \varepsilon_{12} \right\} P_n \quad (4.2.31)$$

$$u_\theta^{(1)} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 \varepsilon_{21} + \mathcal{A}_n \varepsilon_{21} + \mathcal{B}_n \varepsilon_{22} \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.2.32)$$

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 \varepsilon_{31} + \mathcal{A}_n \varepsilon_{31} + \mathcal{B}_n \varepsilon_{32} \right\} P_n \quad (4.2.33)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \Phi_0 \varepsilon_{41} + \mathcal{A}_n \varepsilon_{41} + \mathcal{B}_n \varepsilon_{42} \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.2.34)$$

$$u_r^{(2)} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \mathcal{C}_n \varepsilon_{13} + \mathcal{D}_n \varepsilon_{14} \right\} P_n \quad (4.2.35)$$

$$u_\theta^{(2)} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \mathcal{C}_n \varepsilon_{23} + \mathcal{D}_n \varepsilon_{24} \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.2.36)$$

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{2\mu_2}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \mathcal{C}_n \varepsilon_{33} + \mathcal{D}_n \varepsilon_{34} \right\} P_n \quad (4.2.37)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{2\mu_2}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \mathcal{C}_n \varepsilon_{43} + \mathcal{D}_n \varepsilon_{44} \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.2.38)$$

Los armónicos esféricos se calculan como se muestra en la Tabla 4.1. Estos coeficientes también pueden expresarse en función de relaciones de recurrencia:  $\mathcal{Z}'(x) = \frac{n}{x} \mathcal{Z}_n(x) - \mathcal{Z}_{n+1}(x)$ , donde  $\mathcal{Z}(x)$  se refiere a  $j_n(x)$  o  $h_n(x)$  según sea el caso. Según las condiciones de contorno de continuidad para las componentes del vector de desplazamiento y las componentes radiales del vector de esfuerzo, y con  $r = a$ , se establece el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} & -\varepsilon_{14} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} & -\varepsilon_{24} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & -\gamma_\mu \varepsilon_{33} & -\gamma_\mu \varepsilon_{34} \\ \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & -\gamma_\mu \varepsilon_{43} & -\gamma_\mu \varepsilon_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \\ \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} = -\Phi_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots u_r^{(1)} = u_r^{(2)} \\ \dots u_\theta^{(1)} = u_\theta^{(2)} \\ \dots \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} \\ \dots \sigma_{r\theta}^{(1)} = \sigma_{r\theta}^{(2)} \end{matrix} \quad (4.2.39)$$

donde  $\gamma_\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$ .

Coef.	expresiones	expresiones (relaciones de recurrencia)
$\varepsilon_1$	$j'_n(k_1 r)$	$n j_n(k_1 r) - (k_1 r) j_{n+1}(k_1 r)$
$\varepsilon_2$	$j_n(k_1 r)$	$j_n(k_1 r)$
$\varepsilon_3$	$\left(n^2 + n - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2}\right) j_n(k_1 r) + 2(k_1 r) j'_n(k_1 r)$	$\left(n^2 - n - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2}\right) j_n(k_1 r) + 2(k_1 r) j_{n+1}(k_1 r)$
$\varepsilon_4$	$(k_1 r) j'_n(k_1 r) - j_n(k_1 r)$	$(n - 1) j_n(k_1 r) - (k_1 r) j_{n+1}(k_1 r)$
$\varepsilon_{11}$	$(k_1 r) h'_n(k_1 r)$	$n h_n(k_1 r) - (k_1 r) h_{n+1}(k_1 r)$
$\varepsilon_{21}$	$h_n(k_1 r)$	$h_n(k_1 r)$
$\varepsilon_{31}$	$\left(n^2 + n - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2}\right) h_n(k_1 r) + 2(k_1 r) h'_n(k_1 r)$	$\left(n^2 - n - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2}\right) h_n(k_1 r) + 2(k_1 r) h_{n+1}(k_1 r)$
$\varepsilon_{41}$	$(k_1 r) h'_n(k_1 r) - h_n(k_1 r)$	$(n - 1) h_n(k_1 r) - (k_1 r) h_{n+1}(k_1 r)$
$\varepsilon_{12}$	$-n(n + 1) h_n(\kappa_1 r)$	$-n(n + 1) h_n(\kappa_1 r)$
$\varepsilon_{22}$	$-(\kappa_1 r) h'_n(\kappa_1 r) - h_n(\kappa_1 r)$	$-(n + 1) h_n(\kappa_1 r) + (\kappa_1 r) h_{n+1}(\kappa_1 r)$
$\varepsilon_{32}$	$n(n + 1) \left[ h_n(\kappa_1 r) - (\kappa_1 r) h'_n(\kappa_1 r) \right]$	$-n(n + 1) \left[ (n - 1) h_n(\kappa_1 r) - (\kappa_1 r) h_{n+1}(\kappa_1 r) \right]$
$\varepsilon_{42}$	$(\kappa_1 r) h'_n(\kappa_1 r) - \left(n^2 + n - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2}\right) h_n(\kappa_1 r)$	$-\left(n^2 - 1 - \frac{\kappa_1^2 r^2}{2}\right) h_n(\kappa_1 r) - (\kappa_1 r) h_{n+1}(\kappa_1 r)$
$\varepsilon_{13}$	$(k_2 r) j'_n(k_2 r)$	$n j_n(k_2 r) - (k_2 r) j_{n+1}(k_2 r)$
$\varepsilon_{23}$	$j_n(k_2 r)$	$j_n(k_2 r)$
$\varepsilon_{33}$	$\left(n^2 + n - \frac{\kappa_2^2 r^2}{2}\right) j_n(k_2 r) + 2(k_2 r) j'_n(k_2 r)$	$\left(n^2 - n - \frac{\kappa_2^2 r^2}{2}\right) j_n(k_2 r) + 2(k_2 r) j_{n+1}(k_2 r)$
$\varepsilon_{43}$	$(k_2 r) j'_n(k_2 r) - j_n(k_2 r)$	$(n - 1) j_n(k_2 r) - (k_2 r) j_{n+1}(k_2 r)$
$\varepsilon_{14}$	$-n(n + 1) j_n(\kappa_2 r)$	$-n(n + 1) j_n(\kappa_2 r)$
$\varepsilon_{24}$	$-(\kappa_2 r) j'_n(\kappa_2 r) - j_n(\kappa_2 r)$	$-(n + 1) j_n(\kappa_2 r) + (\kappa_2 r) j_{n+1}(\kappa_2 r)$
$\varepsilon_{34}$	$n(n + 1) \left[ j_n(\kappa_2 r) - (\kappa_2 r) j'_n(\kappa_2 r) \right]$	$-n(n + 1) \left[ (n - 1) j_n(\kappa_2 r) - (\kappa_2 r) j_{n+1}(\kappa_2 r) \right]$
$\varepsilon_{44}$	$(\kappa_2 r) j'_n(\kappa_2 r) - \left(n^2 + n - 1 - \frac{\kappa_2^2 r^2}{2}\right) j_n(\kappa_2 r)$	$-\left(n^2 - 1 - \frac{\kappa_2^2 r^2}{2}\right) j_n(\kappa_2 r) - (\kappa_2 r) j_{n+1}(\kappa_2 r)$

**Tabla 4.1.** Armónicos esféricos para una inclusión elástica esférica.

Se identifica que hay cuatro combinaciones lineales fundamentales en los armónicos, es decir, la estructura de los coeficientes  $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{41}$  y  $\varepsilon_{42}$  se repite intercambiando la elección de la función esférica y su argumento. Debido a esto, se pueden definir, una serie de matrices expresadas como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n\mathcal{Z}_n(\mathcal{X}) - \mathcal{X}\mathcal{Z}_{n+1}(\mathcal{X}) & -n(n+1)\mathcal{Z}_n(\mathcal{Y}) \\ \mathcal{Z}_n(\mathcal{X}) & -(n+1)\mathcal{Z}_n(\mathcal{Y}) + \mathcal{Y}\mathcal{Z}_{n+1}(\mathcal{Y}) \end{bmatrix} \quad (4.2.40)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(n^2 - n - \frac{\mathcal{Y}^2}{2}\right)\mathcal{Z}_n(\mathcal{X}) + 2\mathcal{X}\mathcal{Z}_{n+1}(\mathcal{X}) & -n(n+1)\left[(n-1)\mathcal{Z}_n(\mathcal{Y}) - \mathcal{Y}\mathcal{Z}_{n+1}(\mathcal{Y})\right] \\ (n-1)\mathcal{Z}_n(\mathcal{X}) - \mathcal{X}\mathcal{Z}_{n+1}(\mathcal{X}) & -\left(n^2 - 1 - \frac{\mathcal{Y}^2}{2}\right)\mathcal{Z}_n(\mathcal{Y}) - \mathcal{Y}\mathcal{Z}_{n+1}(\mathcal{Y}) \end{bmatrix} \quad (4.2.41)$$

Empleando las matrices (4.2.40) y (4.2.41), y usando los valores de intercambio para tales matrices definidos en la Tabla 4.2, se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{(1)} & -\mathbf{P}^{(2)} \\ \mathbf{Q}^{(1)} & -\gamma_\mu \mathbf{Q}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \\ \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} = \Phi_0 \begin{bmatrix} \mathbf{P}^{(i)} \\ \mathbf{Q}^{(i)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.2.42)$$

Matrices	$\mathcal{Z}_n$	$\mathcal{X}$	$\mathcal{Y}$
$\mathbf{P}^{(i)}, \mathbf{Q}^{(i)}$	$j_n$	$k_1 a$	$\kappa_1 a$
$\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{Q}^{(1)}$	$h_n$	$k_1 a$	$\kappa_1 a$
$\mathbf{P}^{(2)}, \mathbf{Q}^{(2)}$	$j_n$	$k_2 a$	$\kappa_2 a$

**Tabla 4.2.** Argumentos de intercambio para las matrices  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  debido a una inclusión esférica elástica.

Mediante este sistema matricial se obtienen los coeficientes de dispersión ya que las ecuaciones (4.2.14)-(4.2.16) quedan completamente definidas de acuerdo a las condiciones de contorno, para un dispersor esférico elástico. A continuación se describen los sistemas matriciales correspondientes a inclusiones esféricas de fluido y cavidades de aire.

#### 4.2.2. Dispersión de ondas longitudinales por inclusiones esféricas de fluido y cavidades de aire

Sea una onda longitudinal que incida sobre una inclusión de fluido, los coeficientes  $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$  y  $\mathcal{C}_n$  se obtienen mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & -\varepsilon_{33}^f \\ \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \\ \mathcal{C}_n \end{bmatrix} = -\Phi_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots u_r^{(1)} = u_r^{(2)} \\ \dots \sigma_r^{(1)} = \sigma_r^{(2)} \\ \dots \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0 \end{matrix} \quad (4.2.43)$$

Estas condiciones de contorno reflejan la incapacidad de que una onda transversal se propague en un fluido. Se define un nuevo coeficiente  $\varepsilon_{33}^f$  obtenido a partir de las ecuaciones (4.2.33) y (4.2.37) que formulan la siguiente igualdad:

$$\Phi_0 \varepsilon_3 + \mathcal{A}_n \varepsilon_{31} + \mathcal{B}_n \varepsilon_{32} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left\{ \mathcal{C}_n \varepsilon_{33}^f + \mathcal{D}_n \varepsilon_{34} \right\} \quad (4.2.44)$$

tal que  $\mu_2 \rightarrow 0$  y tomando en cuenta que  $\varepsilon_{34} \rightarrow 0$  debido a que  $j_n(\kappa_2 r) \rightarrow 0$ , además de que  $\mu_1 = \frac{\omega^2 \rho_1}{\kappa_1^2}$  y  $\mu_2 = \frac{\omega^2 \rho_2}{\kappa_2^2}$ , el valor de  $\varepsilon_{33}^f$  está dado por:

$$\varepsilon_{33}^f = \frac{\mu_2}{\mu_1} \varepsilon_{33} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\kappa_1^2}{\kappa_2^2} \varepsilon_{33} \quad (4.2.45)$$

dado que  $\kappa_2 \rightarrow \infty$  podemos aproximar el valor de  $\varepsilon_{33}^f$  como:

$$\varepsilon_{33}^f \approx -\frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \kappa_1^2 r^2 j_n(k_2 r) \quad (4.2.46)$$

Para el caso de cavidades de aire, el sistema de ecuaciones correspondiente se expresa:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \end{bmatrix} = -\Phi_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \dots \sigma_r^{(1)} = 0 \\ \dots \sigma_{r\theta}^{(1)} = 0 \end{matrix} \quad (4.2.47)$$

lo que implica que  $\mu_2 \rightarrow 0, \lambda_2 \rightarrow 0$  y  $\rho_2 \rightarrow 0$ .

#### 4.2.3. Aproximación del modelo de Waterman-Truell en el límite estático

En las anteriores secciones se ha descrito el modo de obtención de los coeficientes de dispersión los cuales están formulados en su forma general, es decir, para cualquier orden  $n$  y siendo dependientes de la frecuencia. Este último hecho es de gran importancia dado que podemos mencionar dos diferentes casos de estudio con relación a esta característica; cuando

las inclusiones poseen un tamaño mucho menor a la longitud de la onda incidente, y cuando el tamaño de las inclusiones es mayor o comparable a dicha longitud de onda. En el primer caso se dice que es un problema estático ó cuasi-estático, mientras que el segundo se le denomina dinámico (ver §3.3.1). En este trabajo se abordan ambos casos tomando en cuenta la dispersión múltiple (contexto cuasi-estático y dinámico) y la aproximación de los modelos de dispersión en el límite estático o la denominada región de Rayleigh (ver §3.3.4). La aproximación del modelo WT en el límite estático se obtiene, primero, resolviendo el sistema matricial expresado en (4.2.39) para  $n < 3$ , por considerar los términos más representativos, calculándose los valores de los coeficientes de dispersión con respecto a la frecuencia. Posteriormente, los armónicos esféricos  $\varepsilon_{ij}$  y  $\varepsilon_i$ , que están en función de las funciones esféricas de Bessel y Hankel, son reemplazados por sus correspondientes representaciones asintóticas definidas como:

$$j_n(z) \approx \frac{n!(2z)^n}{(2n+1)!} \left[ 1 - \frac{z^2}{2(2n+3)} \right] \quad (4.2.48)$$

$$h_0(z) \approx -\frac{i}{z}(1 + iz) \quad (4.2.49)$$

$$h_n(z) \approx -\frac{i(2n)!}{2^n n! z^{n+1}} \left[ 1 + \frac{z^2}{2(2n-1)} \right] \quad (4.2.50)$$

De esta forma, los coeficientes  $\mathcal{A}_0$ ,  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  quedan expresados como:

$$\mathcal{A}_0 = \frac{(k_1 a)^3}{3i} \left[ 1 - \frac{3 \left( \frac{\kappa_1^2}{k_1^2} \right)}{3\gamma_\mu \left( \frac{\kappa_2^2}{k_2^2} \right) - 4(\gamma_\mu - 1)} \right] \quad (4.2.51)$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{(k_1 a)^3}{9i} \left[ 1 - \gamma_\mu \left( \frac{\kappa_2^2}{\kappa_1^2} \right) \right] \quad (4.2.52)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{4(k_1 a)^3}{3i} \left[ \frac{(\gamma_\mu - 1)}{\left( \frac{\kappa_1^2}{k_1^2} \right) [6\gamma_\mu + 9] + 4(\gamma_\mu - 1)} \right] \quad (4.2.53)$$

O bien, en función de los módulos elásticos, volumétrico y transversal, y la densidad de los medios:

$$\mathcal{A}_0 = \frac{(k_1 a)^3}{3i} \left[ \frac{K_1 - K_2}{K_2 + \frac{4}{3}\mu_1} \right] \quad (4.2.54)$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{(k_1 a)^3}{9i} \left[ 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \right] \quad (4.2.55)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{4(k_1 a)^3}{3i} \left[ \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1) + 6\mu_2(K_1 + 2\mu_1)} \right] \quad (4.2.56)$$

De esta forma, se obtienen expresiones en el regimen cuasi-estático del numero de onda complejo longitudinal:

$$\left( \frac{\langle k \rangle}{k_1} \right)^2 = 1 - i \frac{3\phi}{k_1^3 a^3} \left\{ \mathcal{A}_0 + 3\mathcal{A}_1 + 5\mathcal{A}_2 \right\} - \frac{9\phi^2}{4k_1^6 a^6} \left\{ 12\mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 + 60\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2 \right\} \quad (4.2.57)$$

$$\left( \frac{\langle k \rangle}{k_1} \right)^2 = 1 - \phi \left\{ a_0 + a_1 + 20a_2 \right\} + \phi^2 \left\{ a_0 a_1 + 20a_1 a_2 \right\} \quad (4.2.58)$$

donde

$$a_0 = \frac{K_1 - K_2}{K_2 + \frac{4}{3}\mu_1} \quad (4.2.59)$$

$$a_1 = 1 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \quad (4.2.60)$$

$$a_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1) + 6\mu_2(K_1 + 2\mu_1)} \quad (4.2.61)$$

o con respecto a la velocidad longitudinal efectiva  $\langle V_L \rangle$ :

$$\langle V_L \rangle = \frac{V_{L_1}}{\sqrt{1 - \phi \left\{ a_0 + a_1 + 20a_2 \right\} + \phi^2 \left\{ a_0 a_1 + 20a_1 a_2 \right\}}} \quad (4.2.62)$$

Estas expresiones relacionan el número de onda o la velocidad longitudinal efectiva con los coeficientes de dispersión ó en función de los módulos elásticos y la densidad de las fases (siempre y cuando se consideré el estudio en el regimen cuasi-estático).

### 4.3. Modelo Dinámico Generalizado Autoconsistente

El modelo dinámico generalizado autoconsistente (MDGAC) propuesto por Yang (2003) para inclusiones esféricas en coordenadas tridimensionales y con ondas incidentes tanto longitudinales como transversales asume que cada inclusión de radio  $a$  está rodeada por otra esfera concéntrica de radio  $b$  considerada la matriz del material compuesto, y a su vez este sistema está embebido en un medio efectivo con propiedades desconocidas. Por consiguiente, la fracción de volumen  $\phi$ , proporción entre el volumen de la inclusión  $\mathbb{V}_i$  y el volumen total del compuesto  $\mathbb{V}$ , está relacionado con los radios  $a$  y  $b$ , como sigue:

$$\phi = \frac{\mathbb{V}_i}{\mathbb{V}} = \frac{a^3}{b^3} \quad (4.3.1)$$

Partiendo del modelo de Waterman-Trueell mostrado en (4.2.4), Yang propuso que los números de onda de la matriz  $k_1$  y  $\kappa_1$ , debe ser reemplazados por sus respectivos números de onda complejos efectivos de propiedades desconocidas  $\langle k \rangle$  y  $\langle \kappa \rangle$ , resultando:

$$1 = \left[ 1 + \frac{2\pi n_0}{\langle k \rangle^2} f(0) \right]^2 - \left[ \frac{2\pi n_0}{\langle k \rangle^2} f(\pi) \right]^2 \quad (4.3.2)$$

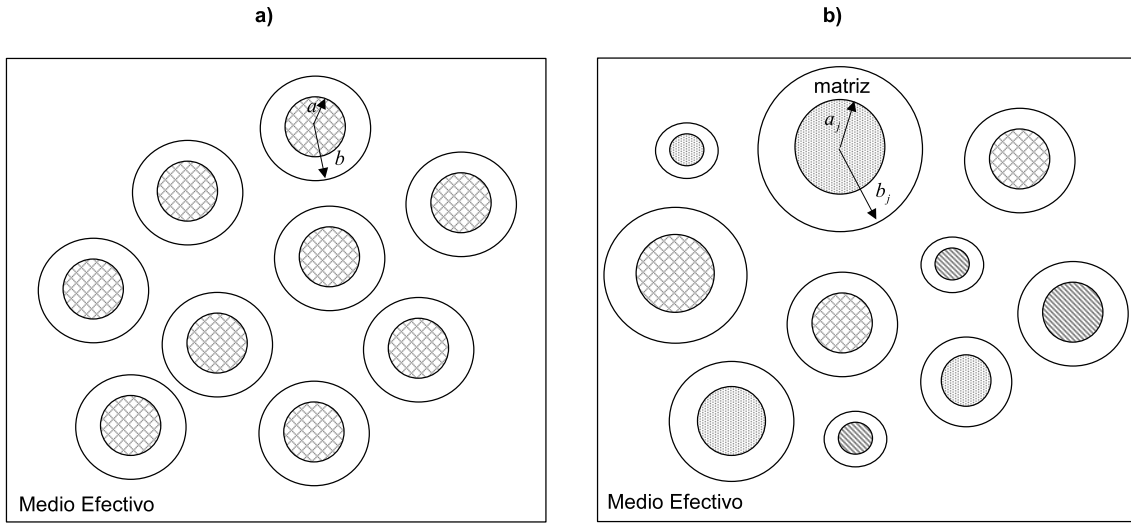
$$1 = \left[ 1 + \frac{2\pi n_0}{\langle \kappa \rangle^2} g(0) \right]^2 - \left[ \frac{2\pi n_0}{\langle \kappa \rangle^2} g(\pi) \right]^2 \quad (4.3.3)$$

donde  $g(0)$  y  $g(\pi)$  son las amplitudes de dispersión transmitidas y reflejadas correspondientes a las ondas transversales (Yang, 2003). Esta expresión se resuelve de forma recursiva y la iteración se da por terminada cuando convergen los valores de  $\langle k \rangle$  y  $\langle \kappa \rangle$ . Los valores iniciales que sugirió Yang son aquéllos obtenidos por el método generalizado autoconsistente estático desarrollado por Christensen y Lo (1979) (véase anexo A.4) ó el método autoconsistente formulado por Sabina y Willis (1988).

Por otra parte, Kim (2004) enfatizó que la formulación de iteración dada por Yang puede interpretarse físicamente ya que la amplitud de dispersión transmitida  $f(0)$ , es proporcional a la energía total “extinguida” debido a los dispersores (Kim, 2003, 2005), por lo que tiende a desvanecerse cuando la inclusión equivalente sólo está rodeada por el medio efectivo, es decir, que el efecto de dispersión no existe debido a que el medio de propagación no es la matriz sino la inclusión misma. Por tanto, el proceso iterativo también puede ser resuelto cuando  $f(0) = 0$ .

#### 4.4. Formulación del Modelo Dinámico Autoconsistente N-Fásico

El método formulado por Yang, aunque sea de carácter general por considerar una incidencia longitudinal y transversal de ondas, para fibras cilíndricas (Yang y Mal, 1994) o inclusiones esféricas (Yang, 2003) sólo ha sido planteado para materiales bifásicos. En esta sección se extiende la formulación del método dinámico autoconsistente (MDAC) para materiales N-fásicos. En la Figuras 4.2a. y 4.2b se representan esquemáticamente el campo de aplicación del modelo bifásico y su extensión al modelo N-fásico.



**Figura 4.2.** Esquema de: a) modelo generalizado autoconsistente (Yang y Mal, 1994) y b) Extensión N-fásica del modelo dinámico autoconsistente.

Considerando un material compuesto de una matriz homogénea y  $j$  tipos diferentes de inclusiones, la expresión (4.3.2), primero puede ser escrita en términos de las fracciones de volumen y los tamaños de las inclusiones de forma similar que (4.2.11) donde se incluyen las contribuciones de los  $j$  distintos tipos de inclusiones, como:

$$\langle k_{p+1} \rangle^2 = \langle k_p \rangle^2 + \sum_j \frac{3\phi_j}{a_j^3} f_j(0) + \frac{9}{4\langle k_p \rangle^2} \sum_j \frac{\phi_j^2}{a_j^6} \left( f_j^2(0) - f_j^2(\pi) \right) \quad (4.4.1)$$

donde

$$f_j(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \mathcal{A}_{n,j}^* (\langle k_p \rangle, \langle \kappa_0 \rangle, a_j, b_j, \langle \mu_0 \rangle, \mu_m, \mu_j) \quad (4.4.2)$$

$$f_j(\pi) = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-1)^n \mathcal{A}_{n,j}^* (\langle k_p \rangle, \langle \kappa_0 \rangle, a_j, b_j, \langle \mu_0 \rangle, \mu_m, \mu_j) \quad (4.4.3)$$



para  $p = 0, 1, 2, \dots$  hasta alcanzar la convergencia ( $\langle k_{p+1} \rangle \approx \langle k_p \rangle$ ). Los valores iniciales ( $p = 0; \langle k_0 \rangle$ ),  $\langle \kappa_0 \rangle$  y  $\langle \mu_0 \rangle$  son aquéllos asociados a los valores efectivos obtenidos por el modelo autoconsistente N-fásico de Sabina-Willis que se describe en el anexo B. La expresión (4.4.1) ha de operarse en cada frecuencia de forma separada, dado que no necesariamente, convergen en el mismo número de iteraciones. Además, se observa que los coeficientes  $\mathcal{A}_{n,j}^*$  dependen del módulo transversal de la matriz  $\mu_m$ , el módulo transversal  $\mu_j$ , y los radios  $a_j$  y  $b_j$  de cada uno de los  $j$  diferentes tipos de inclusiones en el material compuesto.

En esta formulación, el radio exterior  $b_j$  para cada especie puede ser de tamaño diferente pero la proporción  $\frac{a_j}{b_j}$  debe ser la misma para todos los distintos tipos de inclusiones, ya que con este criterio pueden agregarse N-fases al material compuesto (sustituyéndolo por un material homogéneo equivalente) sin cambiar las condiciones de esfuerzo y deformación promedio (Christensen y Lo, 1979). En caso contrario no se garantiza la convergencia de la expresión (4.4.1).

Para fijar una proporción constante entre el radio de las distintas especies de inclusiones y su respectivo radio exterior (matriz), se asume que cada tipo de inclusión  $j$  tiene asociado una proporción de la matriz referida como  $\mathbb{V}_{m,j}$ , que depende de la proporción entre el volumen de este tipo de inclusión con respecto al volumen total de las inclusiones:

$$\mathbb{V}_{m,j} = \mathbb{V}_m \left( \frac{\mathbb{V}_j}{\sum_i \mathbb{V}_i} \right) \quad (4.4.4)$$

donde  $\mathbb{V}_j = \frac{4}{3}\pi a_j^3$  es el volumen del tipo de inclusion  $j$ ,  $\sum_i \mathbb{V}_i$  es el volumen total de los distintos tipos de inclusiones y  $\mathbb{V}_m$  es el volumen total de la matriz en el material compuesto obtenido como:

$$\mathbb{V}_m = \frac{4}{3}\pi \left[ \sum_i b_i^3 - \sum_i a_i^3 \right] \quad (4.4.5)$$

de tal forma que el volumen total del material compuesto está dado por  $\mathbb{V} = \mathbb{V}_m + \sum_i \mathbb{V}_i$ . La fracción volumétrica de un tipo de inclusión  $j$ , sus radios  $a_j$  y  $b_j$  y sus volúmenes están relacionados según la expresión:

$$\phi_j = \frac{a_j^3}{b_j^3} = \frac{\mathbb{V}_j}{\mathbb{V}_j + \mathbb{V}_{m,j}} \quad (4.4.6)$$

Sustituyendo (4.4.4) en (4.4.6):

$$\frac{a_j^3}{b_j^3} = \frac{\mathbb{V}_j}{\mathbb{V}_j + \mathbb{V}_m \left( \frac{\mathbb{V}_j}{\sum_i \mathbb{V}_i} \right)} = \frac{\mathbb{V}_j \sum_i \mathbb{V}_i}{\mathbb{V}_j \sum_i \mathbb{V}_i + \mathbb{V}_m \mathbb{V}_j} = \frac{\sum_i \mathbb{V}_i}{\mathbb{V}_m + \sum_i \mathbb{V}_i} = \sum_j \frac{\mathbb{V}_j}{\mathbb{V}} = \sum_i \phi_i \quad (4.4.7)$$

Por tanto, el radio exterior puede calcularse como:

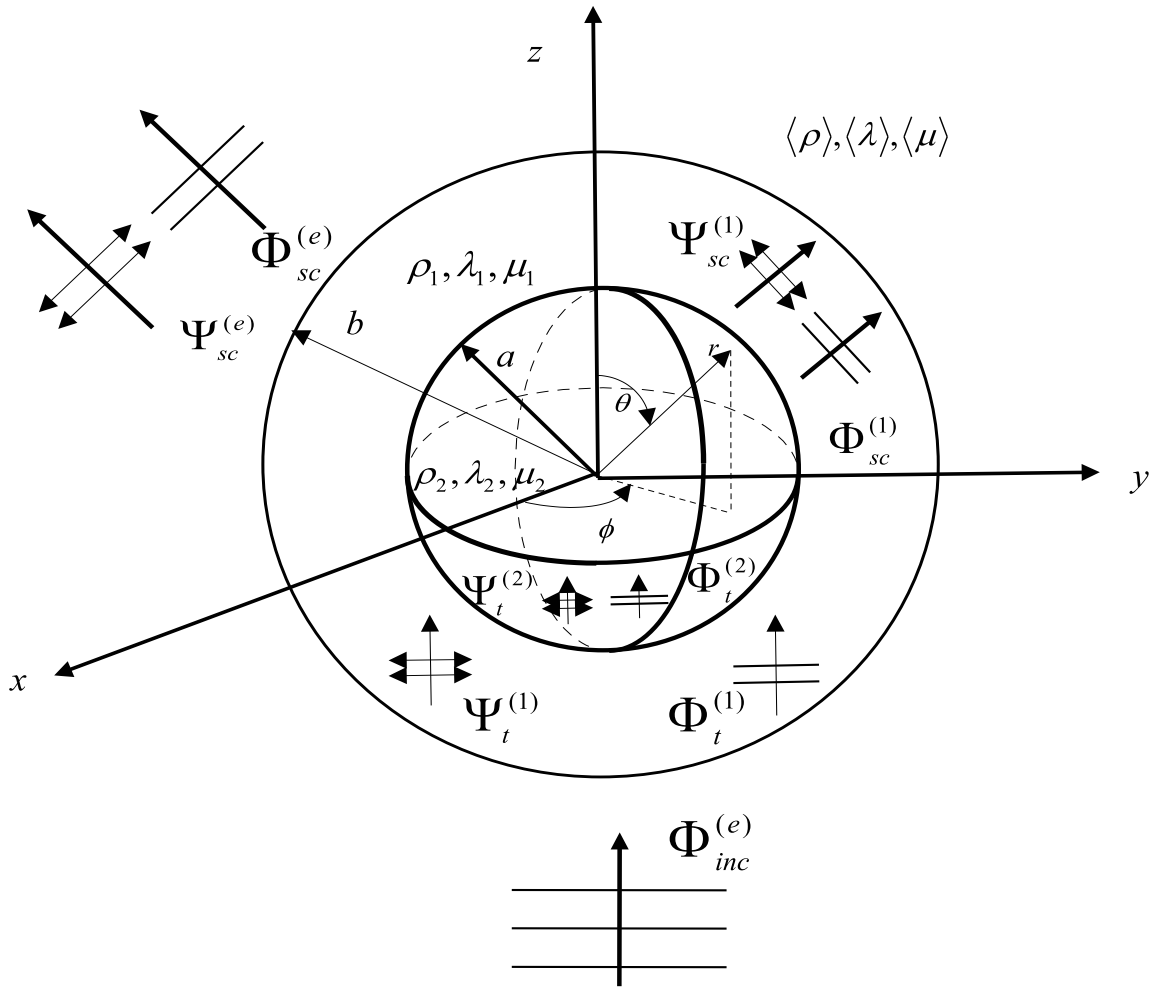
$$b_j = \frac{a_j}{\sqrt[3]{\sum_i \phi_i}}. \quad (4.4.8)$$

donde  $\sum_i \phi_i$  es la suma de las fracciones volumétricas asociadas a cada uno de los distintos tipos de inclusiones. Así, se reparte la matriz de forma proporcional a cada una de las de inclusiones en razón a su tamaño. El volumen de la esfera de radio  $b_j$  varía según la proporción entre el volumen de la inclusión del tipo  $j$  y la fracción volumétrica total de las inclusiones, por lo que se mantiene constante la relación  $\frac{a_j}{b_j}$  y se garantiza la convergencia de (4.4.1). Este planteamiento también ha sido abordado por Benveniste (2008), para el caso del modelo generalizado estático autoconsistente formulado por Christensen y Lo (1979). Por otra parte, los coeficientes de dispersión  $\mathcal{A}_{n,j}$  deben ser calculados tomando en cuenta los distintos tipos de inclusiones que pueden estar embebidos en un material compuesto (inclusiones elásticas, de fluido y cavidades de aire) los cuales dependerán de las diferentes condiciones de contorno de acuerdo a la propagación de una onda longitudinal en las interfases matriz elástica-inclusión elástica, matriz elástica-inclusión de fluido, y matriz elástica - cavidades, como se describe a continuación.

#### 4.4.1. Dispersión de ondas longitudinales por inclusiones esféricas elásticas sólidas en un medio efectivo

En el planteamiento generalizado (ondas longitudinales y transversales incidentes) es conveniente expandir los potenciales en términos de las funciones de onda esféricas en coordenadas  $(r, \theta, \phi)$  como se ha realizado en diversos trabajos (Datta et al, 1988; Sato y Shindo, 2003; Shindo et al, 1995; Wei y Huang, 2004; Yang, 2003). No obstante, como sólo interesa la dispersión debido a la incidencia de una onda longitudinal en dirección a un eje coordenado, la formulación de dispersión puede ser simplificada y establecida únicamente en coordenadas  $(r, \theta)$ .

Sea una onda plana longitudinal propagándose a lo largo de la dirección  $z^+$  por un medio elástico efectivo con propiedades desconocidas ( $\langle\rho\rangle$ ,  $\langle\lambda\rangle$  y  $\langle\mu\rangle$ ), que incide sobre una matriz esférica de radio  $b$  (subíndice 1) que contiene una inclusión elástica de radio  $a$  (subíndice 2). Las ondas longitudinales y transversales generadas, se dispersan y transmiten primero hacia la matriz, donde las mismas generan otras ondas reflejadas y transmitidas debido a la inclusión como se muestra en el esquema de la Figura 4.3.



**Figura 4.3.** Esquema de las ondas reflejadas y transmitidas con respecto a un medio efectivo compuesto que embebe una matriz homogénea y está a su vez contiene una inclusión elástica, para el caso de una onda longitudinal incidente.

Los potenciales de las ondas incidentes se expresan como:

$$\Phi_{inc}^{(e)} = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(\langle k \rangle r) P_n, \quad \Psi_{inc}^{(e)} = 0 \quad (4.4.9)$$

mientras que los potenciales de las ondas dispersas en el medio efectivo se escriben como:

$$\begin{pmatrix} \Phi_{sc}^{(e)} \\ \Psi_{sc}^{(e)} \end{pmatrix} = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \begin{pmatrix} \mathcal{A}_n h_n(\langle k \rangle r) \\ \mathcal{B}_n h_n(\langle \kappa \rangle r) \end{pmatrix} P_n \quad (4.4.10)$$

Las ondas que se propagan en la matriz, de acuerdo a sus potenciales se describen como:

$$\begin{pmatrix} \Phi^{(1)} \\ \Phi^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_t^{(1)} + \Phi_{sc}^{(1)} \\ \Psi_t^{(1)} + \Psi_{sc}^{(1)} \end{pmatrix} = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \begin{pmatrix} \mathcal{C}_n j_n(k_1 r) + \mathcal{E}_n h_n(k_1 r) \\ \mathcal{D}_n j_n(\kappa_1 r) + \mathcal{F}_n h_n(\kappa_1 r) \end{pmatrix} P_n \quad (4.4.11)$$

Finalmente, los potenciales de las ondas que se transmiten hacia el interior de la inclusión vienen dadas por:

$$\begin{pmatrix} \Phi_t^{(2)} \\ \Psi_t^{(2)} \end{pmatrix} = e^{-i\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \begin{pmatrix} \mathcal{G}_n j_n(k_2 r) \\ \mathcal{H}_n j_n(\kappa_2 r) \end{pmatrix} P_n \quad (4.4.12)$$

Estas ecuaciones, en términos de los potenciales, pueden ser escritas en función de las componentes del vector de desplazamiento y las componentes radiales del tensor de esfuerzo empleando, las relaciones dadas en (4.2.17)-(4.2.20) y las componentes de las matrices, mostradas en las ecuaciones (4.2.40) y (4.2.41), con valores de intercambio mostrados en la Tabla 4.3, resultando:

Matrices	$\mathcal{Z}_n$	$\mathcal{X}$	$\mathcal{Y}$
$\mathbf{P}^{(e)}, \mathbf{Q}^{(e)}, \tilde{\mathbf{P}}^{(e)}, \tilde{\mathbf{Q}}^{(e)}$	$h_n, h_n, j_n, j_n$	$\langle k \rangle b$	$\langle \kappa \rangle b$
$\tilde{\mathbf{P}}^{(b)}, \tilde{\mathbf{Q}}^{(b)}, \mathbf{P}^{(b)}, \mathbf{Q}^{(b)}$	$j_n, j_n, h_n, h_n$	$k_1 b$	$\kappa_1 b$
$\tilde{\mathbf{P}}^{(a)}, \tilde{\mathbf{Q}}^{(a)}, \mathbf{P}^{(a)}, \mathbf{Q}^{(a)}$	$j_n, j_n, h_n, h_n$	$k_1 a$	$\kappa_1 a$
$\tilde{\mathbf{P}}^{(0)}, \tilde{\mathbf{Q}}^{(0)}$	$j_n$	$k_2 a$	$\kappa_2 a$

**Tabla 4.3.** Argumentos de intercambio para las matrices  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  considerando el esquema del medio efectivo mostrado en la Figura 4.3.

■  $r > b$

$$u_r^{(e)} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{P}_{11}^{(e)} + P_{11}^{(e)} A_n + P_{12}^{(e)} B_n \right\} P_n \quad (4.4.13)$$

$$u_{\theta}^{(e)} = \frac{1}{b} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{P}_{21}^{(e)} + P_{21}^{(e)} A_n + P_{22}^{(e)} B_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.4.14)$$

$$\sigma_r^{(e)} = \frac{2\langle \mu \rangle}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{Q}_{11}^{(e)} + Q_{11}^{(e)} \mathcal{A}_n + Q_{12}^{(e)} \mathcal{B}_n \right\} P_n \quad (4.4.15)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(e)} = \frac{2\langle \mu \rangle}{b^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{Q}_{21}^{(e)} + Q_{21}^{(e)} \mathcal{A}_n + Q_{22}^{(e)} \mathcal{B}_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.4.16)$$

■  $a < r < b$

$$u_r^{(1)} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{P}_{11}^{(r)} \mathcal{C}_n + \tilde{P}_{12}^{(r)} \mathcal{D}_n + P_{11}^{(r)} \mathcal{E}_n + P_{12}^{(r)} \mathcal{F}_n \right\} P_n \quad (4.4.17)$$

$$u_{\theta}^{(1)} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{P}_{21}^{(r)} \mathcal{C}_n + \tilde{P}_{22}^{(r)} \mathcal{D}_n + P_{21}^{(r)} \mathcal{E}_n + P_{22}^{(r)} \mathcal{F}_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.4.18)$$

$$\sigma_r^{(1)} = \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{Q}_{11}^{(r)} \mathcal{C}_n + \tilde{Q}_{12}^{(r)} \mathcal{D}_n + Q_{11}^{(r)} \mathcal{E}_n + Q_{12}^{(r)} \mathcal{F}_n \right\} P_n \quad (4.4.19)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)} = \frac{2\mu_1}{r^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{Q}_{21}^{(r)} \mathcal{C}_n + \tilde{Q}_{22}^{(r)} \mathcal{D}_n + Q_{21}^{(r)} \mathcal{E}_n + Q_{22}^{(r)} \mathcal{F}_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.4.20)$$

■  $r < a$

$$u_r^{(2)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{P}_{11}^{(0)} \mathcal{G}_n + \tilde{P}_{12}^{(0)} \mathcal{H}_n \right\} P_n \quad (4.4.21)$$

$$u_{\theta}^{(2)} = \frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{P}_{21}^{(0)} \mathcal{G}_n + \tilde{P}_{22}^{(0)} \mathcal{H}_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.4.22)$$

$$\sigma_r^{(2)} = \frac{2\mu_2}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{Q}_{11}^{(0)} \mathcal{G}_n + \tilde{Q}_{12}^{(0)} \mathcal{H}_n \right\} P_n \quad (4.4.23)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(2)} = \frac{2\mu_2}{a^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) \left\{ \tilde{Q}_{21}^{(0)} \mathcal{G}_n + \tilde{Q}_{22}^{(0)} \mathcal{H}_n \right\} \frac{\partial P_n}{\partial \theta} \quad (4.4.24)$$

Estas componentes se disponen de acuerdo a las condiciones de contorno, como sigue:

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(e)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{P}^{(e)} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}^{(b)} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} + \mathbf{P}^{(b)} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} u_r^{(e)} = u_r^{(1)} \\ u_\theta^{(e)} = u_\theta^{(1)} \end{array} \right|_{r=b} \quad (4.4.25)$$

$$\frac{\langle \mu \rangle}{\mu_1} \tilde{\mathbf{Q}}^{(e)} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\langle \mu \rangle}{\mu_1} \mathbf{Q}^{(e)} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Q}}^{(b)} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} + \mathbf{Q}^{(b)} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_r^{(e)} = \sigma_{r1} \\ \sigma_{r\theta}^{(e)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} \end{array} \right|_{r=b} \quad (4.4.26)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}^{(0)} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_n \\ \mathcal{H}_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}^{(a)} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} + \mathbf{P}^{(a)} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} u_r^{(2)} = u_r^{(1)} \\ u_\theta^{(2)} = u_\theta^{(1)} \end{array} \right|_{r=a} \quad (4.4.27)$$

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \tilde{\mathbf{Q}}^{(0)} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_n \\ \mathcal{H}_n \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{Q}}^{(a)} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} + \mathbf{Q}^{(a)} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix}, \quad \left. \begin{array}{l} \sigma_r^{(2)} = \sigma_r^{(1)} \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} = \sigma_{r\theta}^{(1)} \end{array} \right|_{r=a} \quad (4.4.28)$$

Definiéndose el siguiente sistema matricial ( $8 \times 8$ ), expresado con respecto a las matrices de intercambio  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{(e)} & -\tilde{\mathbf{P}}^{(b)} & -\mathbf{P}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \alpha_\mu \mathbf{Q}^{(e)} & -\tilde{\mathbf{Q}}^{(b)} & -\mathbf{Q}^{(b)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{P}}^{(a)} & -\mathbf{P}^{(a)} & \tilde{\mathbf{P}}^0 \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}^{(a)} & -\mathbf{Q}^{(a)} & \beta_\mu \tilde{\mathbf{Q}}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \\ \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \\ \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \\ \mathcal{G}_n \\ \mathcal{H}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}^{(e)} \\ \alpha_\mu \tilde{\mathbf{Q}}^{(e)} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.29)$$

donde  $\alpha_\mu = \frac{\langle \mu \rangle}{\mu_1}$ ,  $\beta_\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$  y  $\mathbf{0} = \mathbf{0}_{(2 \times 2)}$  es una matriz de ceros de  $2 \times 2$ . Esta forma de representación es útil ya que facilita la formulación para el caso de inclusiones de fluido y cavidades como se muestra a continuación.

#### 4.4.2. Dispersión de las ondas longitudinales por inclusiones esféricas de fluido y cavidades en un medio efectivo

El sistema de ecuaciones expresado en (4.4.29) permite la solución de los coeficientes de dispersión debido a una inclusión esférica elástica y una onda incidente longitudinal. Para el caso de inclusiones de fluido y sus condiciones de contorno correspondientes, siguen siendo válidas las expresiones (4.4.25) y (4.4.26), sin embargo, cuando  $r = a$  resulta que:

$$\tilde{P}^{(f)} \mathcal{G}_n = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}^{(a)} & \tilde{P}_{12}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11}^{(a)} & P_{12}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix}, \quad u_r^{(2)} = u_r^{(1)} \Big|_{r=a} \quad (4.4.30)$$

$$\beta_\mu \tilde{Q}^{(f)} \mathcal{G}_n = \tilde{Q}^{(a)} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} + \mathbf{Q}^{(a)} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} \sigma_r^{(2)} = \sigma_r^{(1)} \\ 0 = \sigma_{r\theta}^{(1)} \end{matrix} \Big|_{r=a} \quad (4.4.31)$$

Estas ecuaciones muestran la incapacidad de que una onda transversal se propague en un medio de fluido. Asimismo, se definen un valor escalar  $\tilde{P}^{(f)}$  y un vector columna  $\tilde{Q}^{(f)}$ , debido a que  $\mu_2 \rightarrow 0$  y  $\kappa_2 \rightarrow \infty$ , como:

$$\tilde{P}^f = nj_n(k_2a) - (k_2a)j_{n+1}(k_2a) \quad (4.4.32)$$

$$\tilde{Q}^f = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \kappa_1^2 a^2 j_n(k_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.33)$$

El sistema matricial ( $7 \times 7$ ), ahora queda representando como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{(e)} & -\tilde{\mathbf{P}}^{(b)} & -\mathbf{P}^{(b)} & \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \\ \alpha_\mu \mathbf{Q}^{(e)} & -\tilde{\mathbf{Q}}^{(b)} & -\mathbf{Q}^{(b)} & \mathbf{0}_{(2 \times 1)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 2)} & -\tilde{\underline{P}}^{(a)} & -\underline{P}^{(a)} & \tilde{P}^f \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}^{(a)} & -\mathbf{Q}^{(a)} & \tilde{Q}^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \\ \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \\ \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \\ \mathcal{G}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}^{(e)} \\ \alpha_\mu \tilde{\mathbf{Q}}^{(e)} \\ \mathbf{0}_{(1 \times 2)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.34)$$

donde  $\tilde{\underline{P}}^{(a)}$  y  $\underline{P}^{(a)}$  son vectores filas definidos como:

$$\tilde{\underline{P}}^{(a)} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_{11}^{(a)} & \tilde{P}_{12}^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nj_n(k_1a) - k_1a j_{n+1}(k_1a) & -n(n+1)j_n(\kappa_1a) \end{bmatrix} \quad (4.4.35)$$

$$\underline{P}^{(a)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(a)} & P_{12}^{(a)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} nh_n(k_1a) - k_1a h_{n+1}(k_1a) & -n(n+1)h_n(\kappa_1a) \end{bmatrix} \quad (4.4.36)$$

Para el caso de cavidades, las condiciones de contorno de (4.4.25) y (4.4.26) permanecen iguales y cuando  $r = a$  se establecen la siguientes relaciones:

$$\tilde{\mathbf{Q}}^{(a)} \begin{bmatrix} \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \end{bmatrix} + \mathbf{Q}^{(a)} \begin{bmatrix} \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \left. \sigma_r^{(1)} \right|_{r=a} = 0, \quad \left. \sigma_{r\theta}^{(1)} \right|_{r=a} = 0 \quad (4.4.37)$$

Por tanto, se define el siguiente sistema matricial ( $6 \times 6$ ):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{(e)} & -\tilde{\mathbf{P}}^{(b)} & -\mathbf{P}^{(b)} \\ \alpha_\mu \mathbf{Q}^{(e)} & -\tilde{\mathbf{Q}}^{(b)} & -\mathbf{Q}^{(b)} \\ \mathbf{0} & -\tilde{\mathbf{Q}}^{(a)} & -\mathbf{Q}^{(a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A}_n \\ \mathcal{B}_n \\ \mathcal{C}_n \\ \mathcal{D}_n \\ \mathcal{E}_n \\ \mathcal{F}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}^{(e)} \\ \alpha_\mu \tilde{\mathbf{Q}}^{(e)} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.4.38)$$

#### 4.4.3. Aproximación del Modelo Dinámico Autoconsistente en el límite estático

De forma similar que en §4.2.3, el modelo dinámico autoconsistente puede ser aproximado al límite estático. Sea una onda longitudinal que se propaga por una matriz con inclusiones elásticas y considerando sólo los términos  $\mathcal{A}_0$ ,  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  en su representación asintótica, mediante el uso de las expresiones (4.2.48)-(4.2.50), la amplitud de dispersión transmitida puede ser escrita como:

$$f(0) = \frac{1}{i\langle k \rangle} (\mathcal{A}_0 + 3\mathcal{A}_1 + 5\mathcal{A}_2) \quad (4.4.39)$$

donde

$$\mathcal{A}_0 = \frac{(\langle k \rangle b)^3}{3i} \left[ \frac{(K_1 - \langle K \rangle) + \phi(K_2 - K_1) \frac{(3\langle K \rangle + 4\mu_1)}{(3K_2 + 4\mu_1)}}{(K_1 + \frac{4}{3}\langle \mu \rangle) + 4\phi(K_2 - K_1) \frac{(\mu_1 - \langle \mu \rangle)}{(3K_2 + 4\mu_1)}} \right] \quad (4.4.40)$$

$$\mathcal{A}_1 = \frac{(\langle k \rangle b)^3}{9i} \left[ 1 - \frac{\rho_1}{\langle \rho \rangle} - \phi \frac{\rho_2 - \rho_1}{\langle \rho \rangle} \right] \quad (4.4.41)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{4i(\langle k \rangle a)^3}{3} \langle \mu \rangle \left[ \frac{(\mu_1 - \langle \mu \rangle) - \phi(\mu_1 - \mu_2) \frac{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1) + 6\langle \mu \rangle(K_1 + 2\mu_1)}{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1) + 6\mu_2(K_1 + 2\mu_1)}}{\langle \mu \rangle(9\langle K \rangle + 8\langle \mu \rangle) + 6\mu_1(\langle K \rangle + 2\langle \mu \rangle) - \phi(\mu_1 - \mu_2)P} \right] \quad (4.4.42)$$



y

$$P = 6 \frac{\langle \mu \rangle (K_1 + 2\mu_1)(9\langle K \rangle + 8\langle \mu \rangle) - \mu_1(\langle K \rangle + 2\langle \mu \rangle)(9K_1 + 8\mu_1)}{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1) + 6\mu_2(K_1 + 2\mu_1)} \quad (4.4.43)$$

Como se mencionó anteriormente, el modelo dinámico generalizado autoconsistente puede ser resuelto al estimar  $k$  cuando la amplitud transmitida  $f(0) = 0$ , pero esta condición se cumple solo cuando los coeficientes  $\mathcal{A}_n = 0$ . Considerando que  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = 0$  y empleando las ecuaciones (4.4.40)-(4.4.42), se obtienen las siguientes expresiones (Kim, 2004):

$$\langle K \rangle = K_1 + \phi \frac{(K_2 - K_1)(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)}{(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1) + (1 - \phi)(K_2 - K_1)} \quad (4.4.44)$$

$$\langle \rho \rangle = \phi \rho_2 + (1 - \phi) \rho_1 \quad (4.4.45)$$

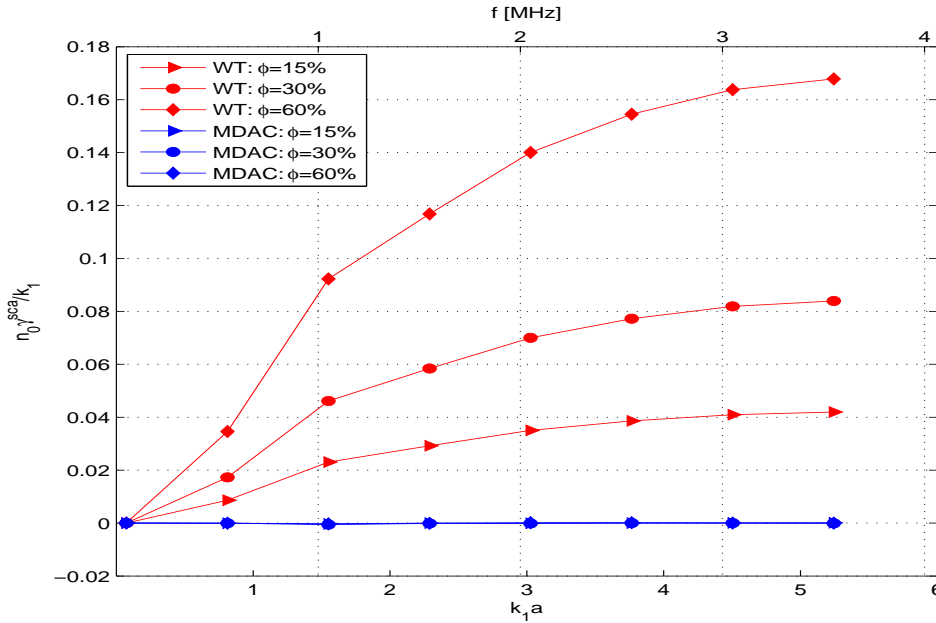
$$\langle \mu \rangle = \mu_1 \left[ \frac{\mu_2(6K_1 + 12\mu_1) + ([1 - \phi]\mu_1 + \phi\mu_2)(9K_1 + 8\mu_1)}{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1) + ([1 - \phi]\mu_2 + \phi\mu_1)(6K_1 + 12\mu_1)} \right] \quad (4.4.46)$$

A diferencia del modelo WT, el modelo DAC proporciona de forma directa los módulos elásticos efectivos. A continuación se muestran criterios de validación del modelo dinámico autoconsistente, ilustrando sus ventajas como también sus limitaciones.

#### 4.4.4. Criterio de validez del Modelo Dinámico Autoconsistente

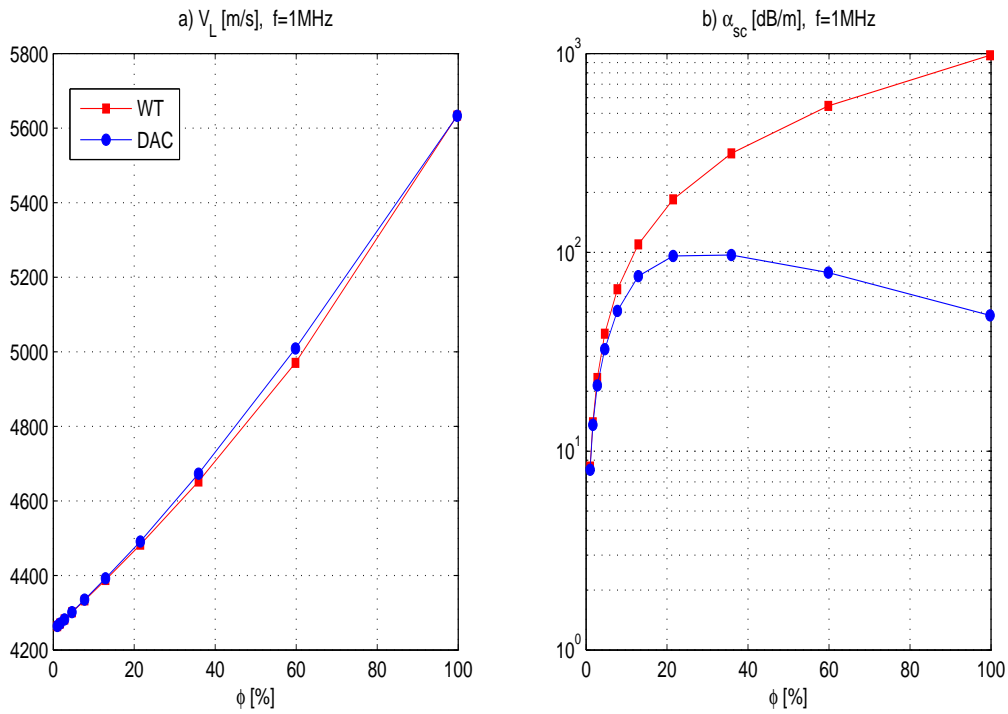
En este apartado se muestran los rangos de aplicación del modelo dinámico autoconsistente en el régimen dinámico, cuasi-estático y en el límite estático. En primer lugar, usando el criterio de validez definido en la expresión (4.2.8) se obtiene el gráfico que se muestra en la Figura 4.4 que ha sido generado considerando una inclusión con radio  $a = 1$  [mm], una matriz con relación (w/c)=0.35 y propiedades elásticas como las que se muestran en la Tabla 4.4 de la sección 4.5. El factor  $k_1 a$  se refiere al producto entre el radio de la inclusión y el número de onda de la matriz, el cual puede verse como una proporción entre la longitud de onda y el radio de la inclusión,  $ka = 2\pi a / \lambda$ . Cuando la longitud de onda es mayor al radio, implica que la dispersión producida se encuentra en la región de Rayleigh, cuando es de igual tamaño está en la región estocástica y es menor se refiere a la región de difusión (Figura 3.3). Como se ha mencionado anteriormente, el modelo WT siempre es válido cuando la dispersión se produce en la región de Rayleigh,  $k_1 a \ll 1$ , debido a que la expresión (4.2.8) siempre se cumple,  $\eta_0 \gamma^{sca} / k_1 \ll 1$ , generalmente  $\eta_0 \gamma^{sca} / k_1 < 0.1$ . De forma similar, el modelo dinámico autoconsistente también es válido en tal región. Como se observa de la Figura 4.4, a medida que aumenta el factor  $k_1 a$  el modelo WT pierde validez, mientras que el modelo

dinámico autoconsistente cumple con este criterio. El valor de las curvas del modelo dinámico autoconsistente tienden a cero,  $\gamma^{sca} \rightarrow 0$ , ya que el modelo converge cuando  $f(0) \rightarrow 0$ , en caso contrario el modelo pierde validez. Sin embargo, este criterio no proporciona un indicador del cumplimiento del modelo DAC a medida que se aumenta la concentración de inclusiones.



**Figura 4.4.** Criterio de Validación para los modelos WT y MDAC con respecto al factor  $k_1 a$ .

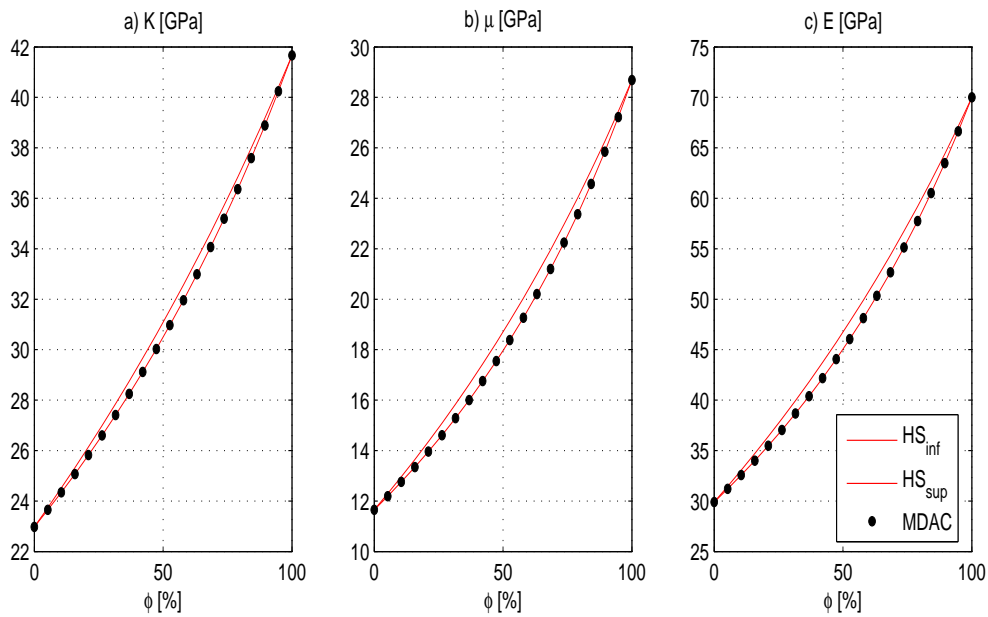
Por tal motivo, es conveniente presentar los gráficos correspondientes a la velocidad y atenuación con respecto a la concentración de inclusiones, véase la Figura 4.5. Sobre estos gráficos se pueden indicar varios aspectos de los modelos. En primer lugar se observa que de acuerdo a las curvas de velocidad ambos modelos coinciden a medida que aumenta la concentración de inclusiones. Este resultado ya había sido comprobado experimentalmente por Layman et al (2006) para matrices de epoxy y microesferas de vidrio para concentraciones menores a 41.3 %, así como también que el modelo WT no concuerda con la predicción de las curvas de atenuación en altas concentraciones. El modelo DAC proporciona mejores resultados que el modelo WT, ya que se observa en la Figura 4.5b que a partir de una cierta fracción volumétrica la atenuación por dispersión va disminuyendo, debido a que las inclusiones van ocupando mayor volumen que la propia matriz con lo cual el efecto dispersivo debe disminuir. Mientras que en este aspecto el modelo WT no es capaz de predecir este comportamiento. En el capítulo 6 se comprobará experimentalmente este efecto sobre materiales cementicios cuyos agregados ocupan hasta un 60 % del volumen total del material.



**Figura 4.5.** Gráficos de velocidad y atenuación con respecto a la concentración de inclusiones obtenidos por el modelo WT y el modelo DAC.

Para ilustrar las características del modelo dinámico autoconsistente en el límite estático,  $k_1 a \rightarrow 0$ , se presenta una serie de gráficos de los módulos elásticos efectivos ( $K, \mu, E$ ) obtenidos por este modelo y comparándolos con las fronteras de Hashin y Shtrikman (1963). Estas fronteras proporcionan una buena estimación de los módulos elásticos efectivos cuando la relación entre los módulos elásticos de las diferentes fases no es muy grande. Las expresiones asociadas a las fronteras de Hashin-Shtrikman se describen en el anexo A.2. Como se observa en la Figura 4.6, el modelo dinámico autoconsistente coincide con la frontera inferior, en todo el intervalo de concentraciones.

Las expresiones (4.4.44)-(4.4.46) coinciden con los módulos efectivos obtenidos por Kuster y Toksöz (1974) (ver anexo A.3) los cuales se encuentran asimismo en las fronteras inferiores de Hashin-Shtrikman. Por otra parte, el módulo volumétrico también coincide con el obtenido por el método generalizado autoconsistente estático formulado por Christensen y Lo (1979) (ver anexo A.4), situación que no sucede para el módulo transversal. Aunque se observa en los anteriores gráficos que las estimaciones de los módulos elásticos del modelo DAC en el límite estático coinciden con las fronteras inferiores de Hashin-Shtrikman, de igual forma que el modelo de Kuster y Toksöz (KT), este modelo en el límite estático no considera



**Figura 4.6.** Comparativa de los módulos elásticos obtenidos por el modelo DAC en el límite estático y con las fronteras de Hashin-Shtrikman con respecto a la concentración de inclusiones: a) Módulo Volumétrico, b) Módulo Transversal y c) Módulo de Young.

la dispersión múltiple de las inclusiones, por lo que sólo es una buena aproximación cuando la matriz ocupa al menos el 70-80 % del volumen total del material compuesto como ha sido comprobado por Berryman y Berge (1996) para el modelo KT. Es importante notar que esta limitación no ocurre en el régimen dinámico ya que en éste si se ha considerado la dispersión múltiple y el modelo dinámico autoconsistente bifásico proporciona buenas estimaciones en el régimen de Rayleigh y estocástico como se ha mostrado en diversos trabajos (Biwa et al, 2004; Haïat et al, 2008; Layman et al, 2006; Sato et al, 2005; Wu et al, 2006).

#### 4.5. Estudio teórico de la dispersión en materiales cementicios

Mediante la utilización del modelo dinámico autoconsistente N-fásico se va a estudiar como afectan teóricamente las diferentes características de los materiales cementicios a la dispersión de las ondas ultrasónicas. Este estudio se lleva a cabo a partir de simulaciones del efecto dispersivo en tres casos que corresponden a los siguientes tipos de material: i) pasta de cemento con inclusiones elásticas sólidas, agregados, ii) pasta de cemento con cavidades, aire ocluido, y iii) pasta de cemento con inclusiones elásticas y cavidades. Las características que se analizan son la variación de la velocidad de fase y atenuación por dispersión dependientes de la frecuencia con respecto a la distribución de tamaños y a la fracción de volumen de las distintas fases que constituyen el material cementicio simulado. En todos los ejemplos

que a continuación se muestran nos referiremos simplemente a la velocidad para indicar la velocidad de fase y atenuación para la atenuación por dispersión. Asimismo, las curvas de estos parámetros también se les denominará perfiles. Se emplean dos tipos de matrices consideradas en estas simulaciones como homogéneas<sup>1</sup>, cuyas propiedades mecánicas corresponden de forma general a un cemento tipo I con una relación agua/cemento igual a 0.35 y otra de 0.40 como se muestran en la Tabla 4.4. Tanto los agregados como el aire ocluido se considerarán inclusiones de forma esférica, cuyas constantes elásticas aparecen en la misma tabla. Respectivamente se denominarán inclusión y cavidad.

Muestras	$\mu$ [GPa]	$K$ [GPa]	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$V_L$ [m/s]	$V_T$ [m/s]
CI-035	11.74	21.79	2316	4254	2382
CI-040	10.57	19.60	2290	4101	2298
Inclusión	28.69	41.67	2500	5654	3387
Aire	0	0.14[MPa]	1.24	344	0

**Tabla 4.4.** *Propiedades de pastas de cemento, inclusiones elásticas y cavidades.*

#### 4.5.1. Caso I. Pasta de cemento + inclusiones esféricas elásticas

Para este primer caso de estudio, se analiza la dispersión producida por inclusiones elásticas esféricas embebidos en una pasta de cemento considerada como homogénea. Como ya se ha indicado se analizan dos efectos; el primero asociado al tamaño de las inclusiones, y el segundo correspondiente a la fracción de volumen, además de los dos efectos conjuntos y con distintas distribuciones de las inclusiones.

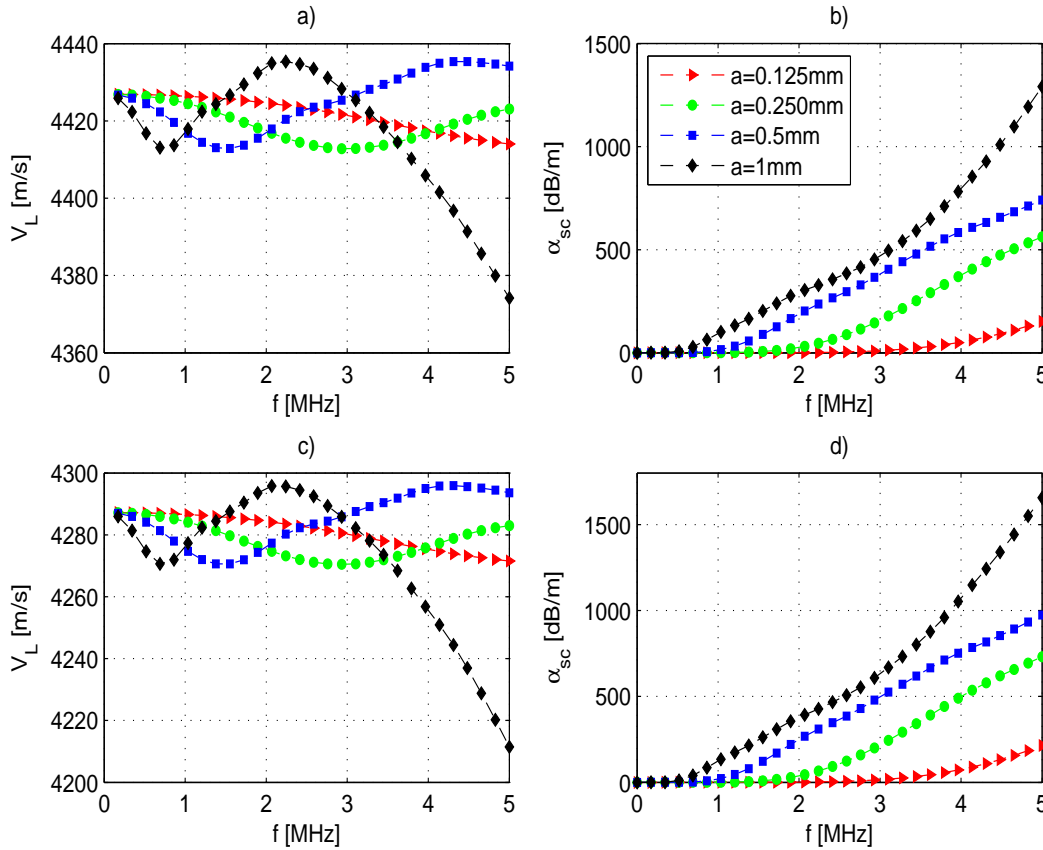
##### 4.5.1.1. Influencia del tamaño de las inclusiones elásticas

La Figura 4.7 muestra las variaciones de la velocidad y atenuación en función de los distintos tamaños de inclusiones, manteniendo una fracción de volumen constante. Se observa que el tamaño de las inclusiones repercute de diferente manera sobre las variaciones de los perfiles de velocidad y atenuación. En cuanto a la velocidad, el tamaño de las inclusiones afecta a la localización de los máximos y mínimos relativos al aumentar el tamaño de las inclusiones, lo que implica que estos valores se desplazan hacia las bajas frecuencias, especialmente en los

---

<sup>1</sup>Cabe señalar que en este estudio se considera la pasta de cemento como una matriz homogénea ya que la porosidad capilar en los intervalos de frecuencias utilizados no contribuye sobre los efectos de dispersión de los perfiles de velocidad y atenuación, pero si afecta a las propiedades elásticas de la matriz. Este efecto se describirá y comprobará a nivel experimental en el capítulo 6.

valores mínimos relativos. La interpretación física de este resultado es que los efectos dispersivos aumentan en proporción a la relación entre el tamaño de las inclusiones y la longitud de onda ultrasónica.



**Figura 4.7.** Gráficos de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia a distintos tamaños de inclusiones y fracción de volumen constante  $\phi = 15\%$ : a) y b) para una matriz de cemento con  $(w/c)=0.35$ , c) y d) para una matriz de cemento con  $(w/c)=0.40$ .

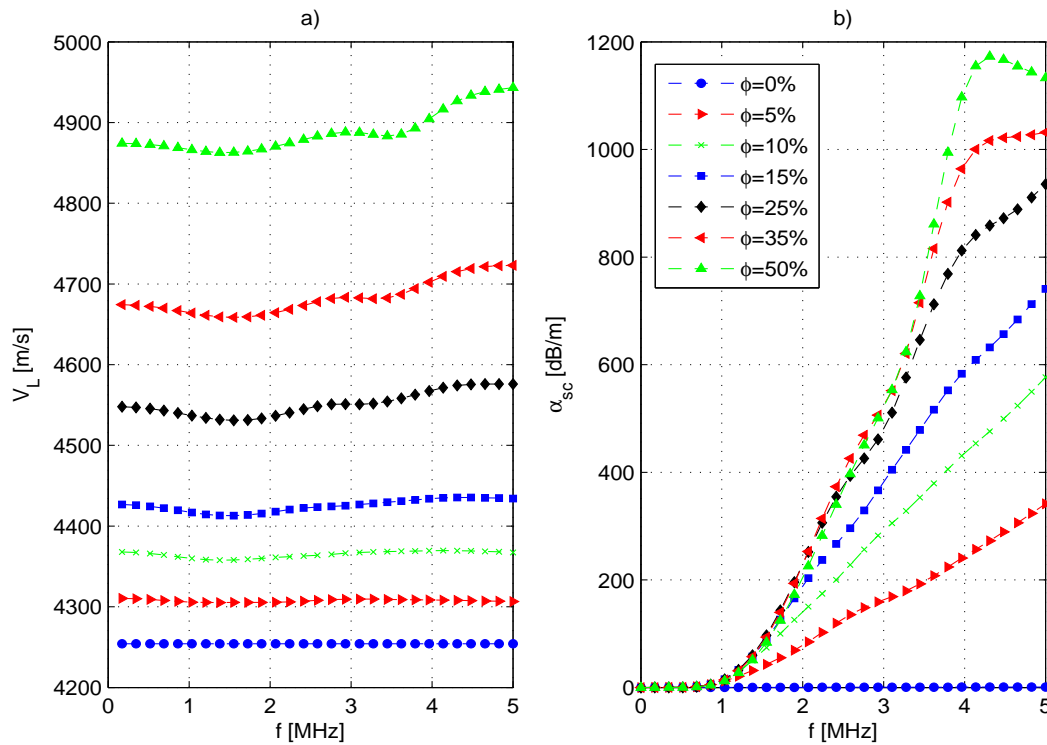
Por ejemplo, en los perfiles de velocidad mostrados en la Figura 4.7a, con un radio de 1 [mm], el valor mínimo se encuentra sobre el eje de frecuencia a 0.606 MHz ( $\lambda = 7.2$  [mm]), mientras que con un radio de 0.5 [mm], se encuentra a una frecuencia de 1.212 MHz (3.6 [mm]), es decir el doble que el primero con respecto a la frecuencia o la mitad en función de la longitud de onda. Es usual, que los efectos dispersivos, se presentan en función del producto entre el número de onda y el tamaño de las inclusiones en vez de la frecuencia, sin embargo, en este trabajo de cara a facilitar la interpretación y comparación entre los resultados teóricos y experimentales se ha preferido presentar los resultados en

función de los tamaños de las inclusiones y de la frecuencia. Aunque sólo se represente un intervalo de frecuencias fijado en 0-5MHz y un rango de tamaños 0.125-1 [mm], las curvas aquí mostradas pueden repetirse en diferentes intervalos de frecuencias y distintos tamaños siempre y cuando la relación  $k_1 a$  se mantenga, siendo  $k_1$  el número de onda de la matriz y  $a$  el radio de la inclusión. Se puede comprobar que las formas de las curvas son prácticamente independientes de las variaciones de las constantes elásticas de la matriz, únicamente afectan al valor de la velocidad media.

Por otro lado, se observa una mayor influencia del tamaño de las inclusiones sobre los perfiles de atenuación en comparación con los perfiles de velocidad (ver Figuras 4.7b y 4.7d). Por ejemplo, incrementando cuatro veces el tamaño de las inclusiones, de  $a = 0.125$  [mm] hasta  $a = 1$  [mm], las variaciones en velocidad no superan los 50 [m/s], mientras que en atenuación puede suponer un aumento de más de 1000 [dB/m]. Por consiguiente, las variaciones de las pendientes de las curvas de atenuación van a depender en gran medida del tamaño de las inclusiones, por lo que facilitará su identificación. Además, se observa que a mayor (w/c) se produce una mayor magnitud en la atenuación pero no se aumenta la capacidad de discriminación entre los diferentes tamaños. Este efecto asociado a las diferentes valores de las matrices cementicias, diferentes (w/c), se reproduce en todos los parámetros microestructurales estudiados por lo que a partir de ahora en el estudio teórico se omite su presentación.

##### 4.5.1.2. Influencia de la fracción de volumen de las inclusiones elásticas

Las variaciones de velocidad y atenuación en materiales con diferentes fracciones de volumen y con un tamaño de inclusiones constante se muestran en la Figura 4.8. Se observan en los perfiles de velocidad, véase la Figura 4.8a, que incrementando la fracción volumétrica de las inclusiones aumenta la velocidad, pudiéndose discriminar fácilmente los cambios en la concentración de las mismas. En cuanto a la atenuación (véase la Figura 4.8b) se observa que a medida que se incrementa la concentración de inclusiones, las variaciones entre ellas son cada vez menores no pudiendo discriminar la atenuación con respecto a la fracción volumétrica. Por tanto, a partir de un cierto porcentaje de inclusiones la atenuación apenas discrimina esta proporción, por lo que el perfil de velocidad identifica de mejor manera los cambios en la fracción de volumen de las inclusiones, a diferencia de la discriminación en cuanto al tamaño, como ha sido descrito en el apartado anterior.

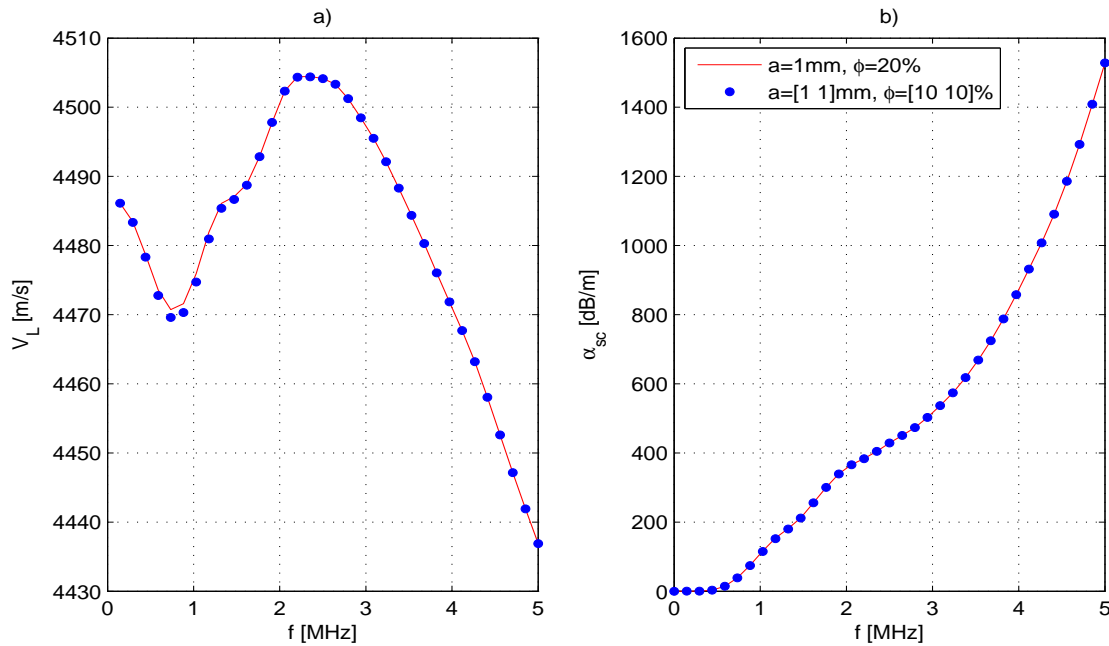


**Figura 4.8.** Gráficos de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia a distintas fracciones de volumen y radio de inclusiones constante  $a = 0.5$  [mm]: a) y b) para una matriz de cemento con  $(w/c) = 0.35$ .

#### 4.5.1.3. Influencia de una distribución de inclusiones elásticas

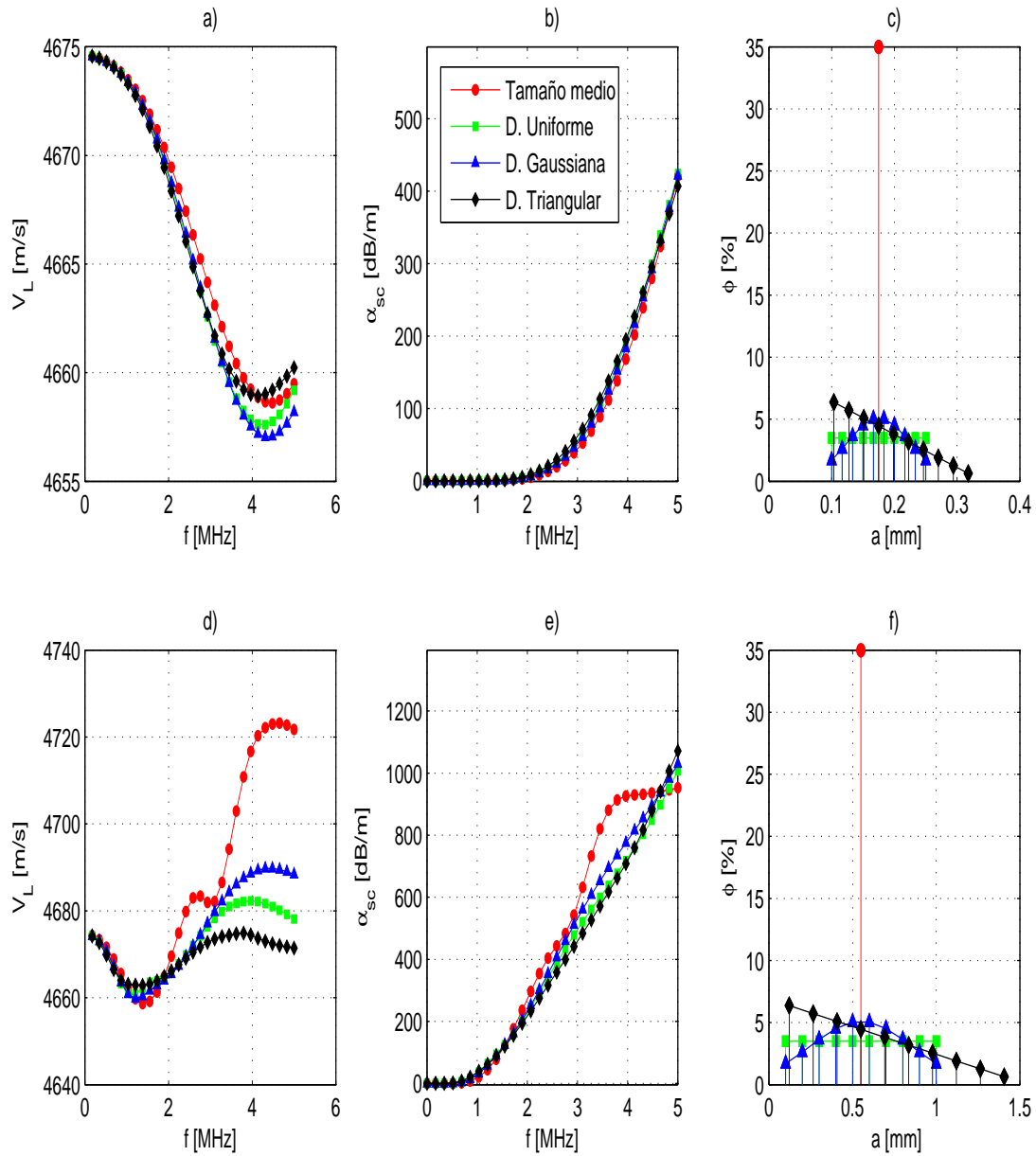
En las secciones anteriores se presentó la variación de la velocidad y atenuación de materiales que tenían un sólo tipo de inclusión de un tamaño determinado. En este apartado se describen los efectos de estos parámetros bajo la consideración de inclusiones de diferentes tamaños y fracciones de volumen situadas dentro de una misma matriz. En primer lugar, se va a comprobar la coherencia del modelo desarrollado y de los algoritmos implementados. Para ello se compara los resultados que se obtienen del mismo material pero descrito de dos formas que implica utilizar dos modelos diferentes, el MDAC bifásico y el MDAC N-fásico desarrollado en este trabajo. Se comprueba que un material con tamaño de inclusión  $a$  con una concentración específica  $\phi$ , coincide con la misma respuesta de otro material compuesto de dos tamaños de inclusión del mismo valor que  $a$  pero con una fracción de volumen de cada una de ellas igual a la mitad de la concentración  $\phi$ , como se ilustra en las Figuras 4.9a y 4.9b. Aunque, se observan pequeñas diferencias en el perfil de velocidad en el intervalo de frecuencias de 0.5 a 1 MHz, éstas no son mayores de 2 [m/s] y son debidas al proceso iterativo del modelo por lo que pueden ser despreciables.





**Figura 4.9.** Gráficos de velocidad y atenuación debido a un tamaño de inclusión  $a$  con  $\phi$ , y con respecto a dos concentraciones de inclusión  $\phi/2$  y  $\phi/2$  con tamaño  $a$ .

Por otro lado, difícilmente un material cementicio consta de un único tamaño de agregados ya que siempre debe incluir una distribución de áridos adecuada para obtener las características necesarias que demanda la aplicación, por ejemplo, en la mezcla del material. Por ello, debe estudiarse la influencia de distintos tipos de distribuciones de inclusiones sobre los perfiles de velocidad y atenuación. Se compararán cuatro casos según el tipo de distribución. Dos casos extremos: un único tamaño y una distribución uniforme, y dos distribuciones intermedias que se presentan habitualmente en estos materiales: una distribución simétrica como la gaussiana y una no simétrica, la triangular monótona decreciente en un intervalo. El tamaño medio ponderado en todas las distribuciones será el mismo. Se observa en la Figura 4.10 que tanto en el perfil de velocidad como en el de atenuación, resulta prácticamente igual utilizar un valor medio en un intervalo de tamaños reducido que usar una cierta distribución en dicho intervalo. A medida que se aumente este intervalo de tamaño de inclusiones se presentan mayores diferencias, no obstante, en un intervalo razonable, variando casi un orden de magnitud, pueden ser despreciables. Por esta razón en la mayor parte de las aplicaciones, utilizar el tamaño medio de la distribución como representación de los agregados sólidos puede ser una buena aproximación.



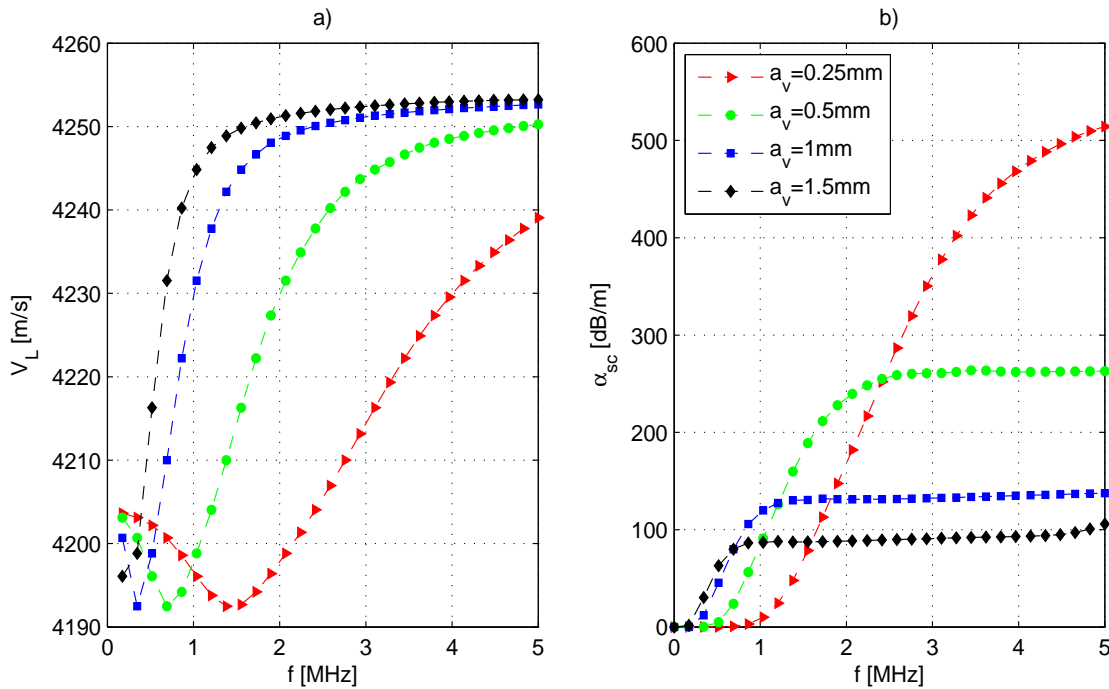
**Figura 4.10.** Gráficos de a), d) velocidad y b), e) atenuación debido a c) y f) distintas distribuciones de tamaño: Tamaño medio, distribución uniforme, distribución gaussiana y distribución triangular.

#### 4.5.2. Caso II. Pasta de Cemento + cavidades

En este segundo caso de estudio, se describen los efectos de la dispersión producida por cavidades como es el caso del aire ocluido. De igual modo que en el caso anterior, se analizan la influencia del tamaño y la fracción volumétrica de las cavidades sobre los perfiles de velocidad y atenuación.

#### 4.5.2.1. Influencia del tamaño de las cavidades

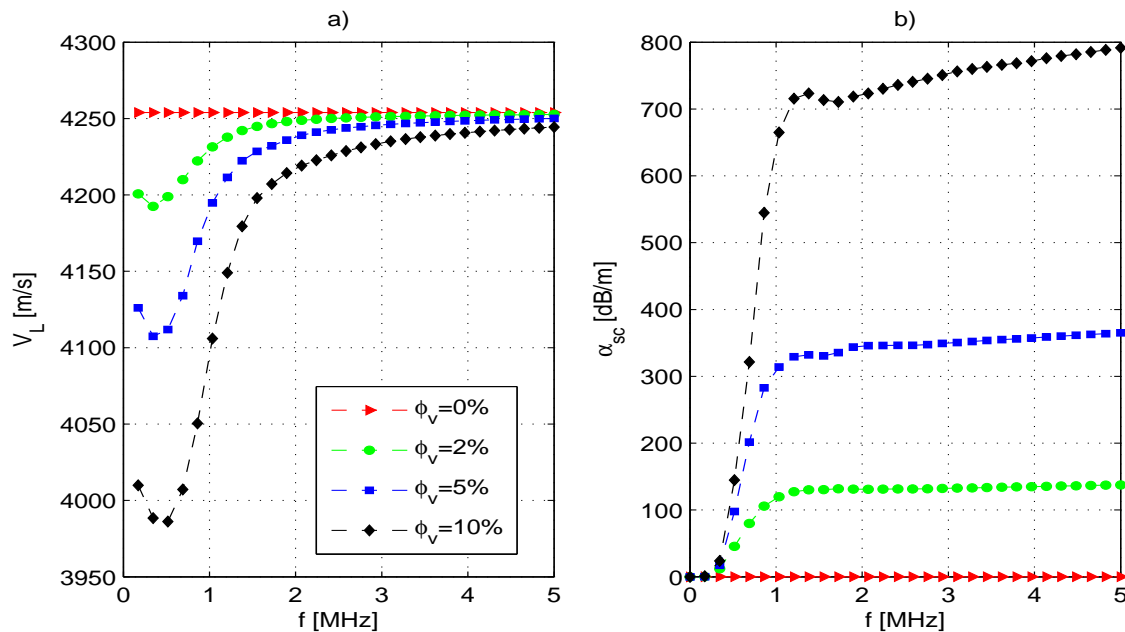
La influencia del tamaño de una cavidad sobre la velocidad y atenuación se muestra en la Figura 4.11. Se observa que la posición de la magnitud mínima de la velocidad en este intervalo de frecuencias está sujeto al tamaño de la cavidad. A medida que el tamaño crece, este valor mínimo se sitúa cada vez más en el intervalo de las bajas frecuencias. En otras palabras, la variación de velocidad está asociado con la proporción entre el tamaño y la longitud de onda. Esta situación se ve mejor ilustrada en los perfiles de atenuación ya que los tamaños menores a  $a_v = 0.5$  [mm] están ubicados todavía en la región de Rayleigh. A tamaños mayores se observa que los perfiles de atenuación están situados en el punto de inflexión, en la región estocástica, y cuando se ha estabilizado el valor de la atenuación en la región de difusión o geométrica. Los tamaños mostrados están dentro del rango típico de aire ocluido en materiales cementicios como se mostró en §2.2.2. De forma similar que en el caso de las inclusiones elásticas, las curvas de atenuación discriminan el tamaño mejor que las curvas velocidad.



**Figura 4.11.** Influencia del tamaño de las cavidades en una matriz de cemento con  $(w/c) = 0.35$  y  $\phi_v = 2\%$  sobre: a) perfiles de velocidad, y b) perfiles atenuación.

#### 4.5.2.2. Influencia de la fracción de volumen de las cavidades

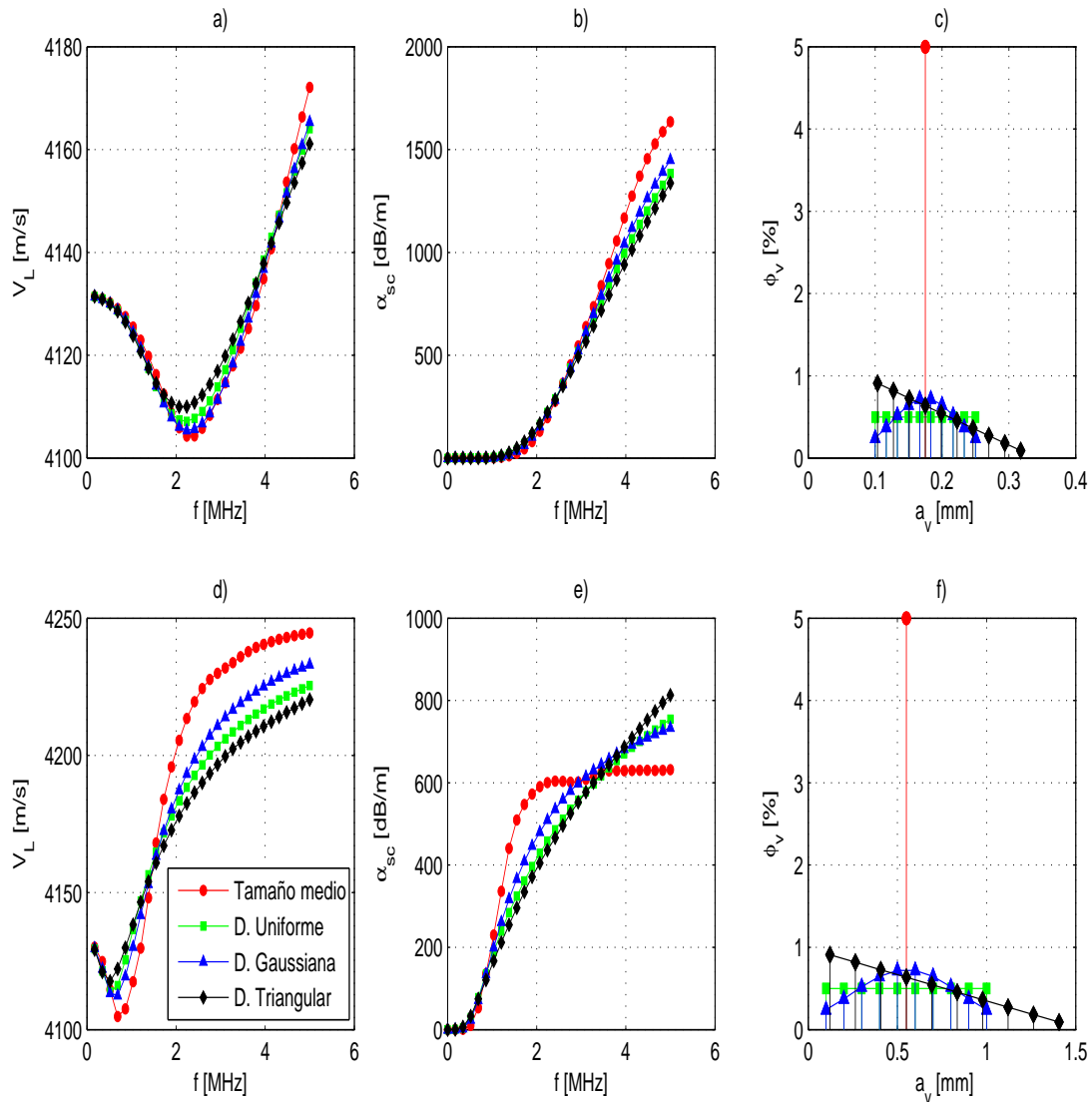
La influencia de la fracción volumétrica de las cavidades sobre la velocidad y atenuación se ilustra en la Figura 4.12. Como se mencionó en la sección anterior, la posición del mínimo en la curva de velocidad está relacionada con el tamaño de la cavidad, pero el valor de la concentración se ve reflejada en la magnitud de este mínimo. Con respecto a las curvas de atenuación, el cambio de la concentración de las cavidades está reflejado desde el inicio, donde se observa que las pendientes de estas curvas antes del punto de estabilización crecen a medida que aumenta la concentración de las cavidades, teniendo el punto de estabilización aproximadamente en la misma frecuencia, 1 MHz.



**Figura 4.12.** Influencia de la concentración de cavidades en una matriz de cemento con  $(w/c):0.35$  y tamaño  $a_v = 1$  [mm] sobre a) perfiles de velocidad y b) atenuación.

#### 4.5.2.3. Influencia de una distribución de cavidades

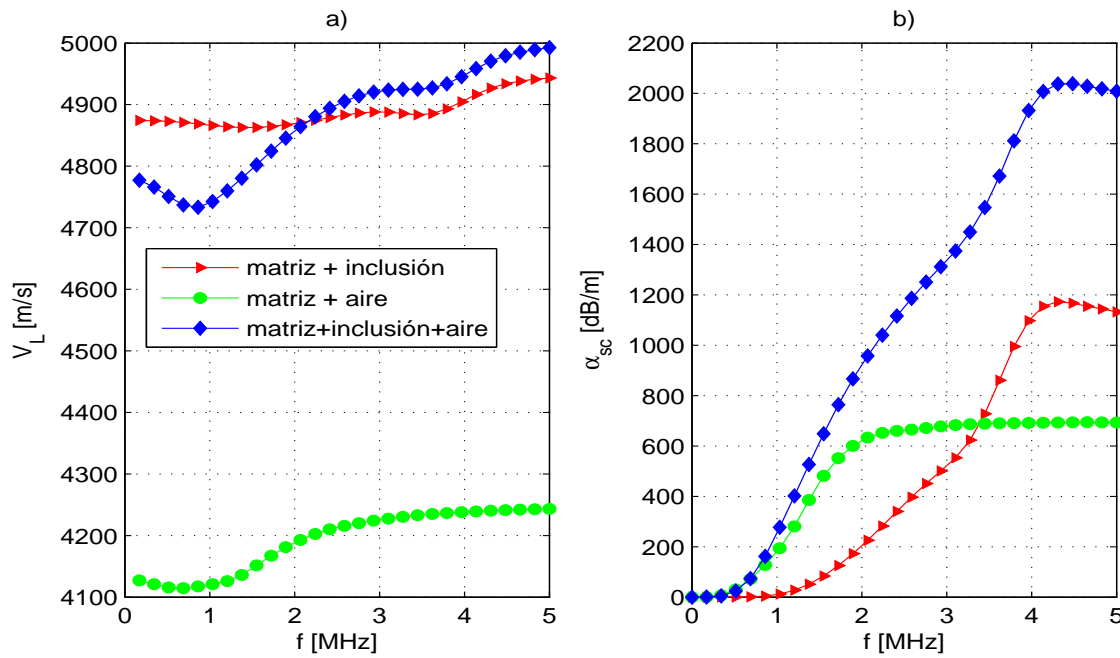
De forma similar que en §4.5.1.3 se muestran los perfiles de velocidad y atenuación de distintas distribuciones de cavidades como se ilustra en la Figura 4.13. En estos gráficos se observa que, a diferencia de las inclusiones elásticas, la pasta de cemento con aire ocluido es mas susceptible a la distribución de los tamaños. Este hecho es de gran importancia ya que a menudo no va ser conveniente representar la distribución de tamaños de las cavidades de un material bifásico como es este caso, pasta de cemento con aire ocluido, mediante un único tamaño medio.



**Figura 4.13.** Gráficos de velocidad y atenuación en una matriz de cemento con  $(w/c)=0.35$ , para distintos tipos de distribuciones de cavidades.

#### 4.5.3. Caso III. Pasta de Cemento + inclusiones elásticas + cavidades

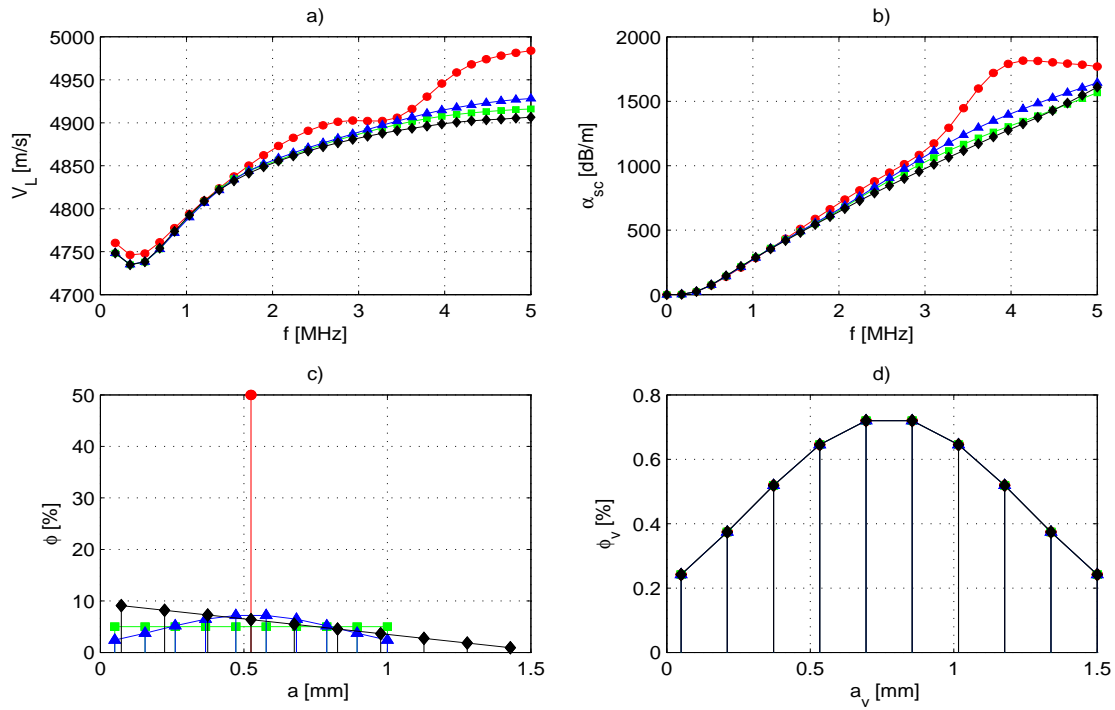
Por último se estudia el comportamiento de un material que se acerca más a los materiales cementicios reales, una matriz de pasta de cemento con inclusiones sólidas y cavidades. Primero, se muestran las curvas de velocidad y atenuación considerando por separado las interacciones debido a la matriz con inclusiones elásticas, la matriz con aire ocluido, así como la interacción de ambas sobre la matriz (véase Figura 4.14). Como se observa de estos gráficos, los perfiles de velocidad y atenuación se ven afectados por el aire ocluido en bajas frecuencias, mientras que las inclusiones elásticas actúan sobre las altas frecuencias.



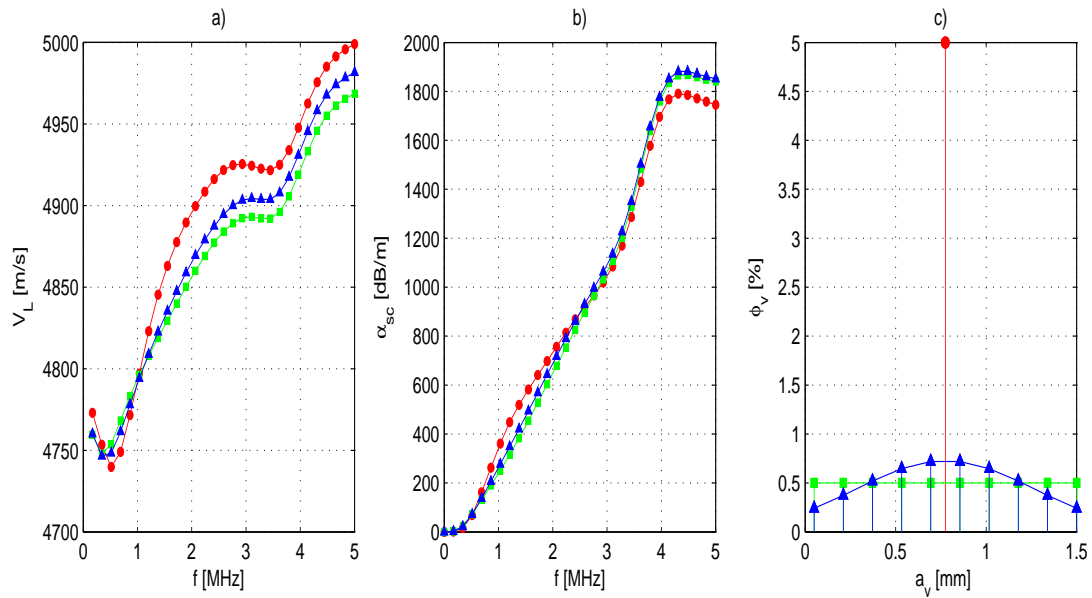
**Figura 4.14.** Gráficos de a) velocidad y b) atenuación considerando la interacción de inclusiones elásticas de tamaño  $a = 0.5$  [mm] y  $\phi = 50\%$  (trazo rojo) y aire ocluido de tamaño  $a_v = 0.5$  [mm] y  $\phi_v = 5\%$  (trazo verde) sobre la matriz y en conjunto (trazo azul).

Así, en el perfil de velocidad del compuesto se ve acentuado el efecto resonante producido por las cavidades y a medida que se incrementa la frecuencia, los valores van coincidiendo con los respectivos a la inclusión. En cuanto a la atenuación se observa el mismo efecto, es decir, la curva de atenuación se ve afectada principalmente por la cavidad, pero a frecuencias mayores ésta sigue el comportamiento del perfil de atenuación del material matriz-inclusión. Por otra parte, comparando los perfiles de velocidad y atenuación de distintos tipos de distribuciones de tamaño, se observa en la Figura 4.15 que pueden apreciarse diferencias entre las diferentes distribuciones a partir de 2 MHz, mientras que fijando un único tamaño de inclusión elástica y variando el tipo de distribución de tamaños de las cavidades, como se ilustra en la Figura 4.16, se observan variaciones a partir de 1 MHz. Por tanto, el comportamiento y variación de estos dos parámetros (velocidad y atenuación) dependen de la fracción volumétrica y del tamaño tanto de las inclusiones elásticas como de las cavidades, sin embargo, las inclusiones elásticas muestran una mayor influencia sobre las altas frecuencias mientras que las cavidades actúan sobre las bajas. Asimismo, la velocidad permite una mejor distinción de la concentración de agregados mientras que la atenuación discrimina en mejor medida los tamaños. La validación experimental de estos resultados se acometerá en el capítulo 6.

#### 4. MODELOS N-FÁSICOS DE DISPERSIÓN MÚLTIPLE PARA LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS



**Figura 4.15.** Gráficos de a) velocidad y b) atenuación, para distintos c) tipos de distribución de tamaños de inclusiones elásticas a  $\phi = 50\%$  y con una d) distribución gaussiana de aire ocluido con una concentración total de  $\phi_v = 5\%$  constante para cada uno de los casos.



**Figura 4.16.** Gráficos de a) velocidad y b) atenuación, para c) distintas distribuciones de tamaño de cavidades con un único tamaño de inclusión elástica de tamaño  $a = 1$  [mm] con  $\phi = 50\%$ .

#### 4.6. Resumen

En este capítulo se han formulado las expresiones correspondientes al modelo dinámico autoconsistente N-fásico, MDAC N-fásico. Utilizando este modelo puede estudiarse la influencia del tamaño y fracción de volumen de distintos tipos de inclusiones sobre la dependencia frecuencial de la velocidad y atenuación ultrasónica. Asimismo al incorporar los efectos de dispersión múltiple, este modelo N-fásico permite abordar el estudio de materiales con altas concentraciones a diferencia de otros modelos dinámicos, por ejemplo, el modelo de Waterman-Truell y el modelo autoconsistente de Sabina-Willis. Se ha realizado un estudio teórico que ha permitido ilustrar las variaciones de la velocidad y atenuación con respecto al tamaño y concentraciones de las distintas inclusiones que pueden componer un material cementicio. Como conclusión importante en la aplicación del modelo desarrollado, hay que citar que la velocidad permite identificar mejor la fracción volumétrica de los constituyentes del material, mientras que la atenuación lo hace con el tamaño. Aunque, los modelos micromecánicos proporcionan información concluyente de que la velocidad discrimina fácilmente la concentración de los agregados no pueden ofrecer lo mismo con respecto a la atenuación. De este modo, el modelo dinámico autoconsistente N-fásico resuelve las limitaciones de baja concentración del modelo de Waterman-Truell y proporciona los perfiles de velocidad y atenuación en función de las propiedades de los agregados de los materiales cementicios. Es importante destacar que este modelo puede ser aplicado para cualquier tipo de material heterogéneo. La validación experimental de los casos de estudio analizados en este capítulo será mostrada en el capítulo 6, pero antes se describe en el siguiente capítulo la técnica de inspección por transmisión y el procesamiento de las señales ultrasónicas para la determinación experimental de la velocidad de fase y la atenuación dependientes de la frecuencia.



---

## CAPÍTULO 5

# TÉCNICA DE INSPECCIÓN POR TRANSMISIÓN Y PROCESADO DE SEÑALES ULTRASÓNICAS

---

*En este capítulo se describen las técnicas de inspección ultrasónicas y métodos de procesado de señales utilizados a lo largo de la presente tesis. Primero, se exponen las distintas técnicas de inspección más empleadas para la medición de la velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia, haciendo hincapié en las técnicas desarrolladas e implantadas. Por otra parte, se adquieren determinadas señales a partir de estas técnicas de inspección que deben ser tratadas para la adecuada extracción de los parámetros deseados. Por tanto, se describen los métodos de procesado de señal habitualmente usados y los desarrollados aquí para tal fin.*

### 5.1. Introducción

Como se ha expuesto en el primer capítulo, uno de los principales objetivos de este trabajo es la caracterización de materiales cementicios por medio de la dispersión ultrasónica. Aunque las siguientes técnicas de inspección y métodos de procesado pueden ser utilizados para la evaluación y detección de defectos o grietas (defectología), este trabajo está enfocado en la medida de la velocidad y de la atenuación dependientes de la frecuencia para la determinación de propiedades y características de la microestructura de los materiales cementicios.

En los ensayos por ultrasonidos se emplean dos tipos de inspección para la medida de la velocidad y de la atenuación: la inspección por pulso-eco y la inspección por transmisión. La primera hace uso de un único transductor para realizar la emisión y recepción de los pulsos ultrasónicos, por tal motivo sólo necesita acceder a una cara del espécimen. La técnica de inspección por transmisión emplea dos transductores, uno como emisor y otro como receptor, colocados cada uno en un lado de la muestra a inspeccionar. La elección de usar estas técnicas está condicionada por varios factores, especialmente, la disponibilidad de acceder a

ambas caras del material y el tipo de material. En materiales altamente dispersivos y cuando se tiene acceso a ambas caras del material es más recomendable utilizar una inspección por transmisión ya que en una inspección por pulso-eco, además de tratar con pulsos recibidos con una relación señal ruido baja, se tiene la problemática del ruido estructural que complica la adecuada determinación de velocidad y atenuación. Independientemente de la técnica de inspección empleada siempre va a ser necesario utilizar un adecuado tratamiento digital de las señales adquiridas para extraer los parámetros ultrasónicos estudiados con la suficiente precisión.

Este capítulo está dividido en tres partes: 1) la descripción de la técnica de inspección ultrasónica por transmisión, 2) la descripción de la metodología usada para la determinación de la velocidad y 3) la correspondiente para la medida de la atenuación. En la primera parte se hace una breve descripción de la inspección ultrasónica por transmisión indicando las características más relevantes, así como la configuración de los distintos dispositivos para la realización de la misma. En la segunda y tercera parte se describen las características más importantes para la determinación de la velocidad y la atenuación. Aunque la medición de estos parámetros se lleve a cabo por la misma inspección configurada en transmisión, se utilizan diferentes métodos de procesamiento para la determinación de dichos parámetros, como se verá más adelante.

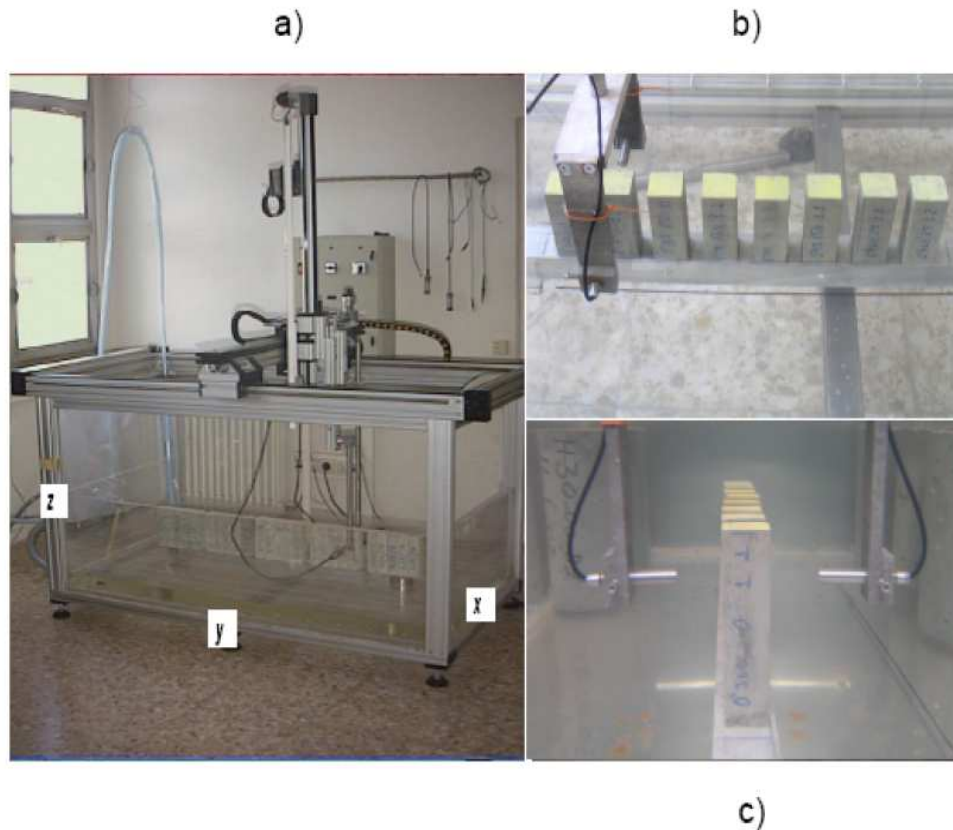
## **5.2. Inspección ultrasónica por transmisión**

La inspección por transmisión necesita dos transductores, uno emisor y otro receptor, que normalmente se colocan uno de cada lado del espécimen o muestra. Se pueden utilizar otras disposiciones cuando no son accesibles las dos caras, los llamados métodos indirectos, pero que complican la adquisición e interpretación de las señales. Posteriormente, se genera una señal eléctrica por medio de un generador de señales que excita al transductor emisor produciendo una onda ultrasónica. Esta onda o pulso ultrasónico viajará a través del material de tal forma que parte de la energía asociada a esta onda es reflejada por las distintas heterogeneidades del medio y otra transmitida. La energía transmitida puede ser detectada por el transductor receptor. Así, la información obtenida por este tipo de inspección proporciona el tiempo de propagación del pulso generado, como también la diferencia entre la energía recibida con respecto a la emitida. El primer caso revela la medida de la velocidad, mientras que el segundo la atenuación. Aunque este procedimiento pueda parecer sencillo en primera instancia, a medida que se inspeccionen materiales con mayor cantidad de heterogeneidades o irregularidades en su estructura, la medición precisa del tiempo de vuelo y de la energía de

las señales aumenta en complejidad. Otros factores que influyen en estas medidas son el tipo de acoplamiento entre los transductores y la pieza a inspeccionar, el tamaño y geometría de la misma, o bien la dificultad o pérdida de energía al propagarse la onda en el medio, por citar las más significativas.

Existen dos técnicas fundamentales para transferir energía entre un material y un transductor: el acoplamiento por contacto y el acoplamiento por inmersión. La técnica de acoplamiento por contacto se efectúa colocando directamente los transductores sobre el material. Entre el material y los transductores se añade una fina capa de acoplante líquido o semi-líquido (gel, aceite, vaselina, etc.), o bien se utiliza un acoplamiento seco (goma, plastilina, etc.). Siempre el grosor del acoplante utilizado debe ser inferior a un cuarto de la longitud de onda para que no se produzcan interferencias negativas en el pulso ultrasónico. Esta técnica es la más usual y simple para la medición de la velocidad y atenuación, pudiéndose realizar de manera manual y sin grandes o complejos equipamientos. Sin embargo, tiene inconvenientes a la hora de medir estos parámetros con gran precisión ya que la amplitud de la señal ultrasónica recibida es muy sensible a la manera de efectuar este acoplamiento. La amplitud de la señal varía con la cantidad y tipo de acoplante, con la rugosidad de la superficie y con la presión de contacto, lo que implica imprecisiones y dificultad en la repetitividad de la medida.

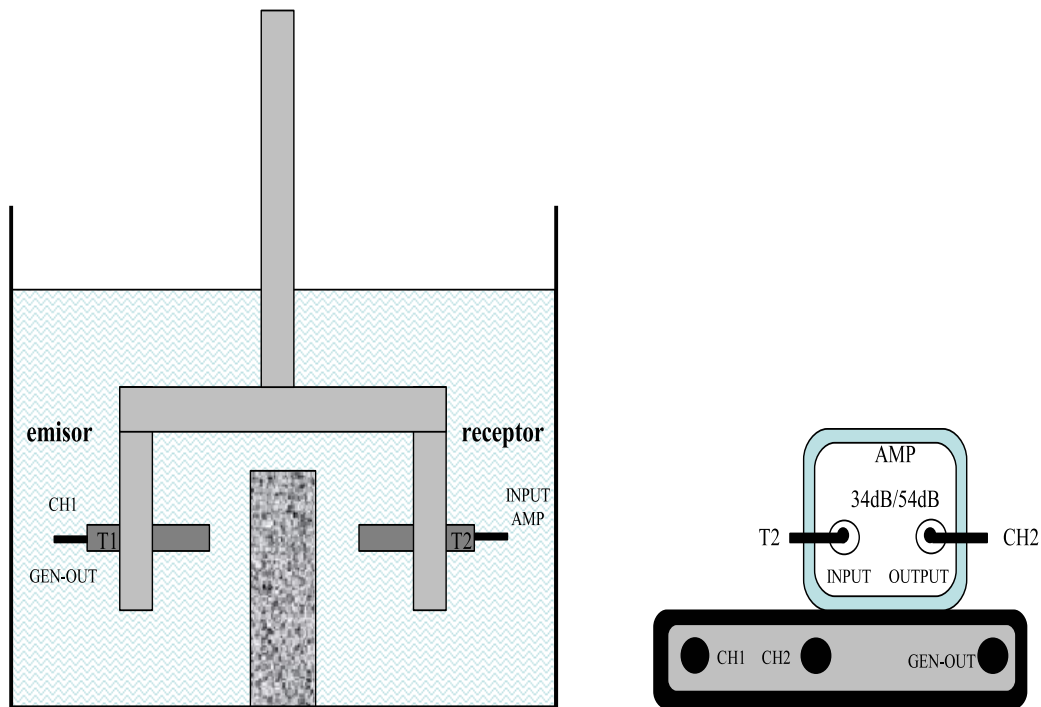
El acoplamiento por inmersión se realiza sumergiendo los transductores y la pieza a inspeccionar en un mismo medio líquido, normalmente agua. La distancia entre los transductores y la superficie de la pieza tiene que ser mayor que la anchura del pulso ultrasónico para evitar que se produzcan interferencias entre el pulso transmitido y el reflejado por la superficie. Esta técnica de acoplamiento tiene la ventaja de que la cantidad de energía que se transfiere al material permanece constante y facilita la implantación de un sistema de barrido automático de las piezas. La desventaja de esta técnica radica en que a veces es imposible la inspección de grandes piezas o estructuras. De cualquier forma, este tipo de inspección es adecuada para efectuar inspecciones de probetas o testigos de materiales cementicios ya que la precisión y repetitividad de las medidas es elevada y más si se utilizan sistemas de barrido automático, como el sistema utilizado que se muestra en la Figura 5.1.



**Figura 5.1.** Fotografía del a) sistema de barrido automático (piscina rellena de agua), b) Probetas de pasta de cemento y mortero empleadas en la inspección, y c) Posición de los transductores con respecto a las probetas.

### 5.2.1. Sistema Ultrasónico de emisión-recepción

El sistema utilizado para la realización de la experimentación no es convencional, hay que tener en cuenta que es necesario medir tanto la velocidad ultrasónica como la atenuación en función de la frecuencia y en materiales altamente dispersivos. Se ha diseñado un sistema sencillo que cumple las especificaciones necesarias pero que posibilita su utilización fuera del laboratorio. La configuración de los dispositivos empleados en la inspección por transmisión en inmersión se ilustra en la Figura 5.2. Se utilizan un par de transductores de banda ancha, uno como emisor y otro como receptor (Krautkramer H5K, 5 MHz, diámetro 10[mm]), un osciloscopio digital Modelo HS3 de Tie-Pie, alimentado y conectado a PC por USB, con 12 bits de digitalización y frecuencia de muestreo máxima de 100MHz, que posee dos canales de entrada más otro canal que actúa como generador de funciones de 8 bits. Este osciloscopio se emplea tanto para la generación de la señales de excitación como para la adquisición. Además, se utiliza un pre-amplificador (Panametrics Inc, mod 5662 con ganancia seleccionable de 34/54dB).



**Figura 5.2.** Configuración del sistema de inspección por transmisión en inmersión.

El modo de operación general de esta configuración consta de tres partes:

- *Generación de la señal de excitación y emisión.* En este proceso se generan señales sintéticas (digitales) desde un entorno de programación (Matlab™) para su posterior conversión digital-analógico por medio de un generador de funciones integrado en el osciloscopio digital Tie-Pie. Este generador de funciones está conectado al transductor emisor que efectúa la conversión de energía eléctrica a mecánica. Además, se sincronizan las adquisiciones con las señales emitidas.
- *Recepción y pre-amplificación de las señales.* Una vez que la señal ultrasónica viaja a través del material se recibe por el transductor receptor convirtiendo la energía acústica a eléctrica y pre-amplificando esta señal. La señal amplificada se digitaliza adquiriéndose por un canal del osciloscopio (Canal 2).
- *Procesado de la señal.* La señal digital es procesada dependiendo de la variable a medir: se extrae el tiempo de vuelo para determinar la velocidad o bien, la amplitud del pulso de recepción para la obtención de la atenuación. Los métodos empleados para este fin son descritos más adelante los cuales son realizados en un ordenador personal conectado al HS3.

Mediante esta configuración y haciendo uso del generador de señales como fuente de excitación para el transductor emisor, resulta un sistema flexible que permite generar cualquier tipo de excitación. Se han utilizado principalmente dos tipos de señales de excitación dependiendo de la variable a medir: pulsos sinusoidales con envolvente gaussiana y de banda estrecha generadas en un cierto número de frecuencias centrales para la determinación de la velocidad y una señal sinusoidal con un barrido de frecuencias lineal comúnmente conocida por su término en inglés “*chirp*”, para las medidas de atenuación. La elección de estas señales de excitación se justificará en cada una de las secciones correspondientes.

### 5.3. Medición de la velocidad ultrasónica

En una inspección por transmisión en inmersión la velocidad longitudinal  $V_L$  se mide a partir de la siguiente expresión:

$$V_L = \frac{d}{\Delta t + \frac{d}{V_w}} \quad (5.3.1)$$

donde  $d$  es el espesor de la pieza,  $\Delta t = t_s - t_w$  es la diferencia entre el tiempo de vuelo  $t_s$  correspondiente a la onda ultrasónica que atraviesa al material y el tiempo de vuelo  $t_w$  correspondiente a la onda que viaja solamente en el agua, mientras que  $V_w$  es la velocidad de la onda en el agua. Cabe mencionar que se debe entender el tiempo de vuelo como el tiempo asociado a la propagación de un punto de fase constante (ver §3.2.3.1). Como ya se ha indicado, en los materiales dispersivos esta velocidad no es igual a la de grupo o del frente de ondas. Por consiguiente, se deberá en principio, determinar una metodología que mida este tipo de velocidad. Sin embargo, cuando no interese la evolución frecuencial de la velocidad, o bien, se supone insignificante sus variaciones, puede medirse cualquier tipo de velocidad.

Por ejemplo, los equipos comerciales de ultrasonidos utilizados en la industria de la construcción miden solamente el tiempo que transcurre entre el pulso que se emite y detectando el flanco delantero de la envolvente del pulso recibido. Este instante está determinado por el primer frente de onda ultrasónico cuya amplitud es mayor que un umbral prefijado e invariable. Si esta medida se realiza con precisión y consiguiendo una alta relación señal ruido, la velocidad media es la velocidad del frente de ondas. Como se mencionó anteriormente, si lo que se busca es la determinación del tamaño y fracción de volumen de los agregados, la dependencia frecuencial de la velocidad no debe despreciarse *a priori*.

### 5.3.1. Técnicas de excitación

La determinación de la velocidad longitudinal en una inspección en transmisión con respecto a su dependencia frecuencial puede medirse utilizando dos métodos diferentes de acuerdo al tipo de excitación del transductor de emisión, utilizando pulsos de banda ancha o un conjunto de pulsos de banda estrecha emitidos sobre un rango específico de frecuencias centrales. El tipo de excitación a emplear delimitará los métodos correspondientes a la determinación del tiempo de vuelo y se aplicará en ambos casos la expresión (5.3.1). En este trabajo se emplea la segunda técnica para la determinación de la velocidad de fase, pero como se describe a continuación, se da una breve explicación de los dos métodos y justificando la elección del segundo. La primera técnica consiste en la emisión de un pulso lo suficientemente corto en duración temporal para que el transductor genere un pulso ultrasónico de 1-2 ciclos para conseguir una respuesta frecuencial de banda ancha del transductor. Este pulso ultrasónico concentra su máxima energía en la frecuencia de resonancia para la que fue diseñado el transductor y el ancho de banda está condicionado por las características que ha dado el fabricante. El pulso propagado que se recibe proporciona la respuesta al impulso del material en inspección, por lo que es posible la determinación de la diferencia de fase entre este pulso y uno de referencia que es otro pulso emitido de la misma forma pero propagado solamente en agua. Trasladando la información de fase en medida de tiempo se determina la velocidad de fase. La expresión para el cálculo de la velocidad usando este método es como sigue:

$$V_L = \frac{d}{\frac{\Delta\varphi(\omega)}{\omega} + \frac{d}{V_w}} \quad (5.3.2)$$

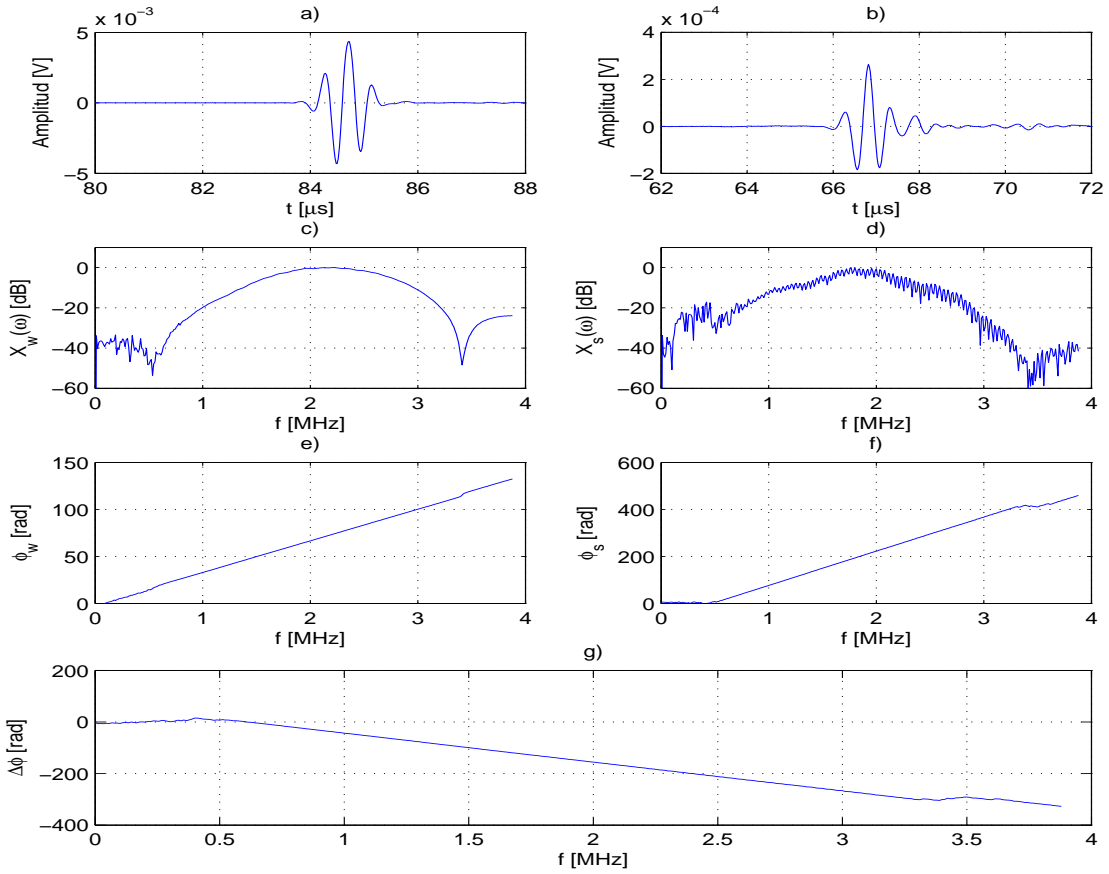
con  $\Delta\varphi(\omega) = \varphi_w(\omega) - \varphi_s(\omega) - \varphi_0$ , donde  $\varphi_w$  y  $\varphi_s$  es la información de la fase con respecto a la frecuencia del pulso de referencia y del pulso que se propaga por el material, respectivamente. El valor de  $\varphi$  es el valor del desfase entre los dos pulsos. La fase con respecto a la frecuencia de una señal temporal  $x(t)$  puede ser calculada como:

$$\varphi = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}\{X(\omega)\}}{\text{Re}\{X(\omega)\}} \right\} \quad (5.3.3)$$

donde  $X(\omega)$  es la representación en frecuencia de  $x(t)$ . Los valores de  $\varphi$  deben permanecer dentro del intervalo cerrado  $[-\pi, \pi]$ , en caso contrario deben corregirse por el efecto de periodicidad. La dificultad de este método radica en la adecuada obtención de la diferencia entre ellas ya que debe calcularse mediante un ajuste lineal de  $\Delta\varphi$  y la frecuencia, obteniéndose el valor  $\varphi_0$ , que en el ajuste lineal es la ordenada al origen. La precisión de  $\varphi_0$  depende de la relación señal a ruido y el ancho de banda del transductor. Para ilustrar este hecho se pre-



sentan dos casos de estudio experimentales, con una muestra de mortero con una fracción volumétrica de agregados de  $\phi = 13\%$  y tamaño de agregado  $a = 1\text{ [mm]}$ , y con una muestra de mortero con  $\phi = 38\%$  y con el mismo tamaño de agregados que la primera. Se ha generado un pulso de banda ancha y de corta duración con una frecuencia de 2MHz y respuesta en frecuencia tal como se muestran en las Figuras 5.3a y 5.4a.

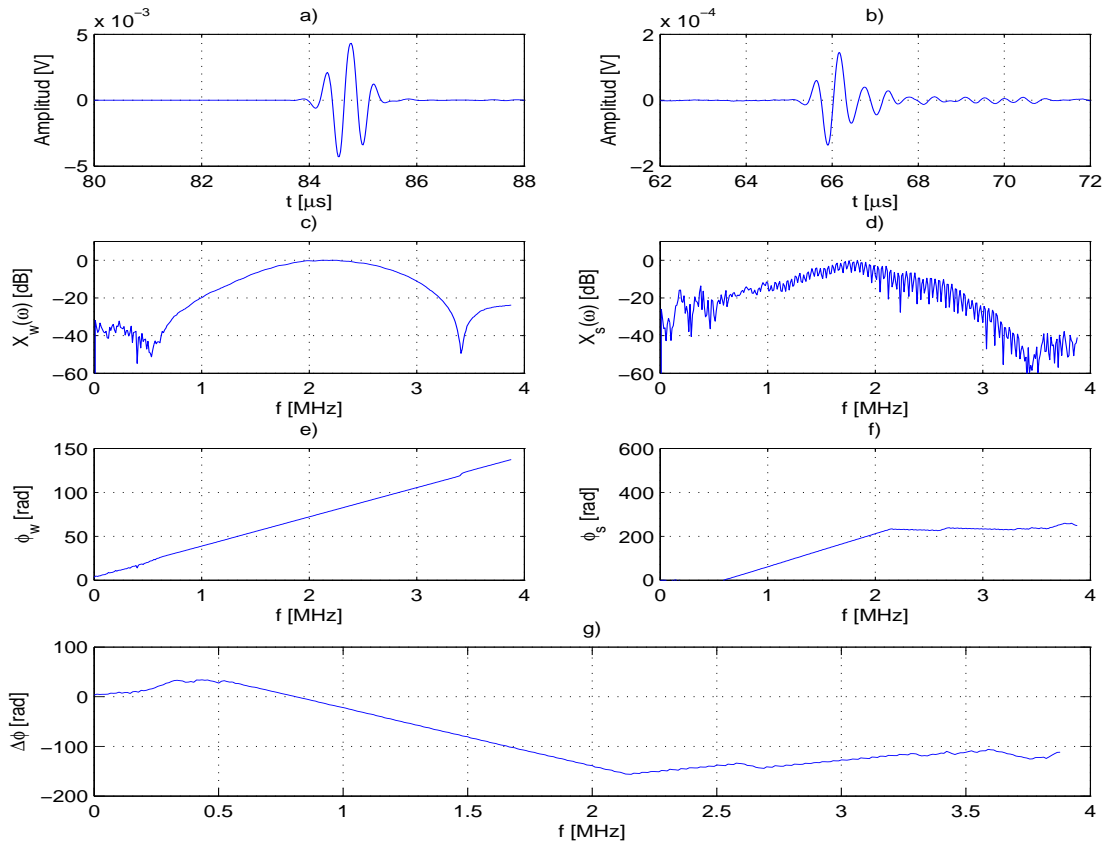


**Figura 5.3.** Ejemplo de obtención de  $\Delta\varphi$  para una muestra de mortero con concentración de agregados  $\phi = 13\%$  y tamaño  $a = 1\text{ [mm]}$ . a), c), e) pulso recibido en agua y su respectivo espectro de amplitud  $X_w(\omega)$  y fase  $\varphi_w(\omega)$ , respectivamente; b), d), f) pulso propagado en el material y su respectivo espectro de amplitud  $X_s(\omega)$  y fase  $\varphi_s(\omega)$ , respectivamente; g) Diferencia de fases  $\Delta\varphi$ .

En primer lugar, cabe señalar que esta técnica ha sido ampliamente utilizada para la determinación de la velocidad en medios homogéneos o con baja dispersión. Comparando los resultados de las Figuras 5.3 y 5.4, se observa en ambos casos que los pulsos recibidos no presentan grandes distorsiones en amplitud y forma, y por consiguiente sus espectros

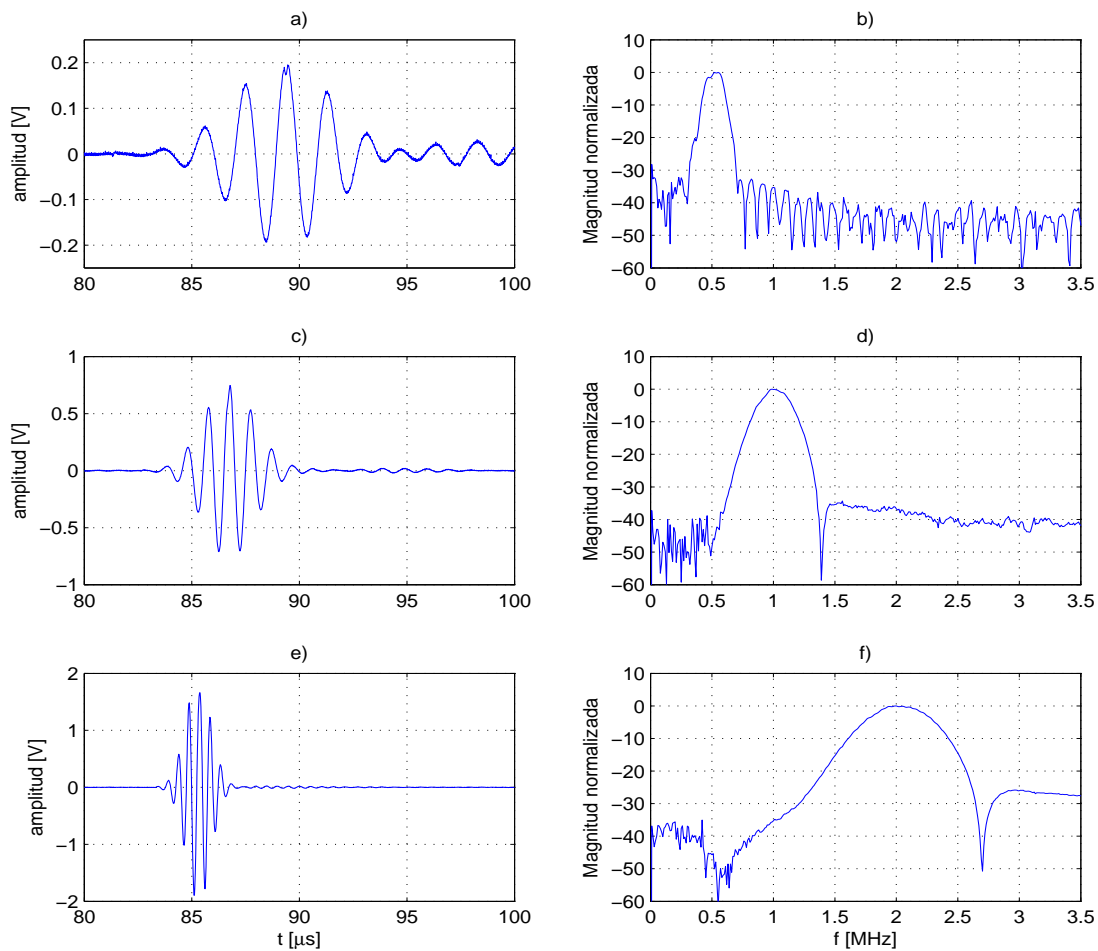


correspondientes muestran un ancho de banda extenso y efectivo (0.5-3MHz). No obstante, a medida que el medio es más dispersivo (Figura 5.4), la fase no es lineal en todo el ancho de banda efectivo, y no proporciona una adecuada determinación de la velocidad. Estos gráficos ilustran el intervalo de frecuencias donde tiene que ser realizado el ajuste lineal de  $\Delta\varphi$ , tal que para el primer caso aproximadamente en 0.5-3MHz (véase Figura 5.3g), y para el segundo caso en 0.6-2.1MHz (ver Figura 5.4g). Por otra parte, el intervalo de frecuencias seleccionado para la obtención de  $\varphi_0$  es muy sensible ocasionando diferencias en el cálculo de la velocidad.



**Figura 5.4.** Ejemplo de obtención de  $\Delta\varphi$  para una muestra de mortero con concentración de agregados  $\phi = 38\%$  y tamaño  $a = 1$  [mm]. a), c), e) pulso recibido en agua y su respectivo espectro de amplitud  $X_w(\omega)$  y fase  $\varphi_w(\omega)$ , respectivamente; b), d), f) pulso propagado en el material y su respectivo espectro de amplitud  $X_s(\omega)$  y fase  $\varphi_s(\omega)$ , respectivamente; g) Diferencia de fases  $\Delta\varphi$ .

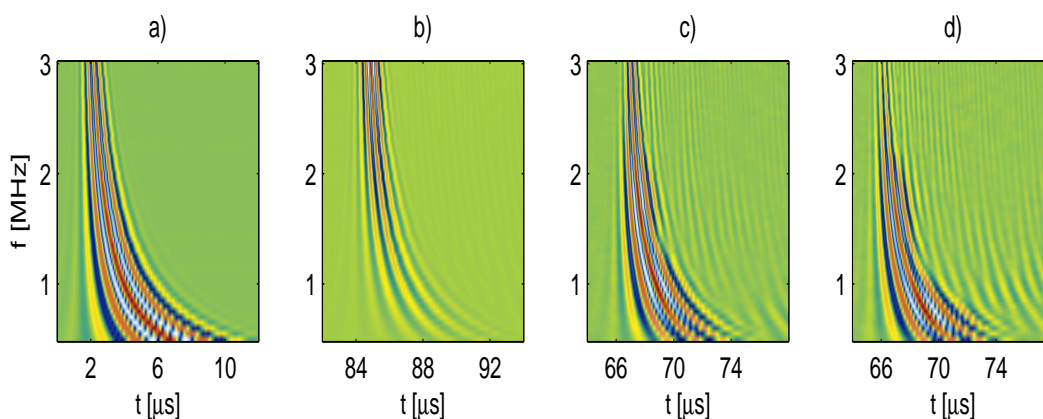
La segunda técnica consiste en generar un conjunto de pulsos eléctricos de banda estrecha y envolvente gaussiana a determinadas frecuencias. Mediante estos pulsos se excita al transductor emisor generando un pulso ultrasónico en la misma frecuencia en que fue excitado. Con el fin de que el transductor oscile a una cierta frecuencia de banda estrecha se genera una señal eléctrica de 6-8 ciclos como se muestra en la Figura 5.5.



**Figura 5.5.** Señales temporales y su respuesta en frecuencia de diferentes pulsos de banda angosta emitidos a: a), b) 0.5MHz, c), d) 1MHz y e), f) 2MHz.

De esta forma, se pretende barrer una gama discreta de frecuencias. En la técnica anterior, la energía se concentraba en la componente frecuencial en que fue emitido en el pulso de excitación (2MHz), y el ancho de banda efectivo estaba condicionado directamente con las características propias del transductor. En este caso, el transductor oscila en la frecuencia

de emisión concentrándose la mayor energía en tal componente, por lo que realizando un barrido empleando esta técnica, se garantiza que se emite un pulso en dicha frecuencia y de mayor concentración energética. De esta manera, se puede emplear cualquier transductor de banda ancha para la generación de estos pulsos y medir discretamente la velocidad de fase con respecto a la frecuencia. Sin embargo, como se han generado pulsos eléctricos a distintas frecuencias, estas señales ultrasónicas no tienen el mismo instante de referencia como se observa en la Figura 5.6. Por ejemplo, en la técnica anterior, sólo se generaba un único pulso de banda ancha cuyas componentes frecuenciales se iniciaban en el mismo instante, por lo que las diferentes fases tienen la misma referencia temporal, en cambio con esta técnica se tiene que corregir este valor para cada una de las frecuencias discretas elegidas.



**Figura 5.6.** Pulsos eléctricos emitidos y ultrasónicos recibidos representados como una imagen (50 filas, cada una representa un pulso generado a una frecuencia de emisión); a) imagen de los pulsos eléctricos, y las imágenes de los pulsos ultrasónicos propagados en: b) agua, y en muestras de mortero tamaño de agregados  $a = 1$  [mm] y concentración de éstos de c)  $\phi = 13\%$  y d)  $\phi = 38\%$ .

En la Figura 5.6 se observa las diferencias entre cada una de las cincuenta señales generadas en un intervalo uniforme de frecuencias de 0.5-3MHz. La Figura 5.6a muestra, en representación de una imagen, los cincuenta pulsos eléctricos (filas) respectivos a cada una de las cincuenta frecuencias elegidas. Como se ha mantenido constante el número de ciclos (8 ciclos) a medida que aumente la frecuencia de emisión, se observa que el pulso se acorta y los puntos de fase correspondientes al pulso a una frecuencia no necesariamente coinciden con uno emitido a otra. Esta corrección ha de ser aplicada tanto a los pulsos ultrasónicos propagados en agua (ver Figura 5.6b) y aquéllos que se propaguen en los materiales de inspección (Figuras 5.6c y 5.6d). La expresión genérica para la determinación de la velocidad de fase

usando esta técnica es:

$$V_L = \frac{d}{\Delta t_s - \Delta t_w + \frac{d}{V_w}} \quad (5.3.4)$$

donde  $\Delta t_s = t_s - t_e$  es la diferencia entre el tiempo de vuelo  $t_s$  correspondiente a la onda ultrasónica que atraviesa al material y el instante de tiempo  $t_e$  medido en la señal eléctrica; de igual forma  $\Delta t_w = t_w - t_e$  es obtenido para el pulso ultrasónico que se propaga solamente en agua. Para una adecuada corrección, por ejemplo,  $t_s$  y  $t_e$  deben ser determinados tomando en cuenta un mismo punto de la señal eléctrica y del pulso ultrasónico, es decir, un mismo punto de fase. A diferencia de la técnica de emisión de pulso de banda ancha, en esta técnica se pueden medir con diferentes métodos el tiempo de vuelo, principalmente por la detección de la envolvente, el método de correlación y detección de cruces por cero. Estos métodos son descritos a continuación.

### 5.3.2. Métodos para la determinación del tiempo de vuelo

Como ya se mostró en el anterior capítulo, en ocasiones la variación de la velocidad de fase con respecto a la frecuencia en material heterogéneos puede llegar a ser del orden de uno por ciento lo que exige un mínimo error en la medición de este parámetro. Además, como se ha elegido la técnica de excitación por pulsos de banda estrecha monofrecuenciales emitidos en un intervalo de frecuencias, es necesario determinar las diferencias de instantes  $\Delta t_s$  y  $\Delta t_w$  lo más preciso posible. En esta sección se describen distintas técnicas muy utilizadas para la medición del tiempo de vuelo de una señal ultrasónica, como son la detección de la envolvente, la determinación del retardo por medio de correlaciones y la medición del tiempo de vuelo por la detección de cruces por cero. Todas las anteriores han sido empleadas para la medición de la velocidad dependiente de la frecuencia, especialmente, las dos últimas. Mediante las primeras dos técnicas lo que se determina es la velocidad de grupo ya que la medición del tiempo de vuelo está en función de los puntos máximos de las señales, en otras palabras, miden la velocidad de la envolvente cuya distorsión en amplitud debido a la dispersión del medio hace que esta medición no proporcione la velocidad de fase. Para la adecuada determinación de la velocidad de fase en una inspección en transmisión se utiliza la medición del desplazamiento de un punto de fase (generalmente los cruces por cero) y técnicas del espectro de fase, cómo se describió anteriormente. Sin embargo, la obtención del espectro de fase es un proceso muy sensible a la relación señal a ruido y del ancho de banda de los transductores a emplear. A continuación se describen de forma breve cada una de las técnicas mencionadas y se muestran las comparaciones más representativas entre ellas.

### 5.3.2.1. Detección de la envolvente y método de correlación cruzada

La envolvente de una señal puede ser calculada mediante la obtención previa de la señal analítica,  $x_a(t)$  de una señal real  $x(t)$  y se expresa como:

$$x_a(t) = x(t) + i\hat{x}(t) \quad (5.3.5)$$

donde  $\hat{x}(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$  es la transformada de Hilbert sobre  $x(t)$ , definida como (Cohen, 1995):

$$\mathcal{H}\{x(t)\} = \text{p.v.} \int \frac{x(\tau)}{\pi(t - \tau)} d\tau \quad (5.3.6)$$

donde p.v. se refiere al uso del valor principal de Cauchy. No obstante es más conveniente utilizar el siguiente procedimiento:

$$X_a(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \omega < 0 \\ X(\omega) & \text{Si } \omega = 0 \\ 2X(\omega) & \text{Si } \omega > 0 \end{cases} \quad (5.3.7)$$

$$x_a(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_a(\omega)\} \quad (5.3.8)$$

donde  $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ ,  $\mathcal{F}\{\cdot\}$  es la Transformada de Fourier (TF) y  $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$  es la Transformada Inversa de Fourier. La señal analítica de una señal real contiene la misma información espectral para las componentes frecuenciales positivas y valores de cero para las componentes frecuenciales negativas. La señal analítica en términos de coordenadas polares complejas,  $x_a(t) = A(t)e^{i\varphi(t)}$ , queda en función de la envolvente  $A(t)$  y la fase instantánea  $\varphi(t)$ :

$$A(t) = |x_a(t)| = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)} \quad (5.3.9)$$

$$\varphi(t) = \arg\{x_a(t)\} = \arctan\left\{\frac{\hat{x}(t)}{x(t)}\right\} \quad (5.3.10)$$

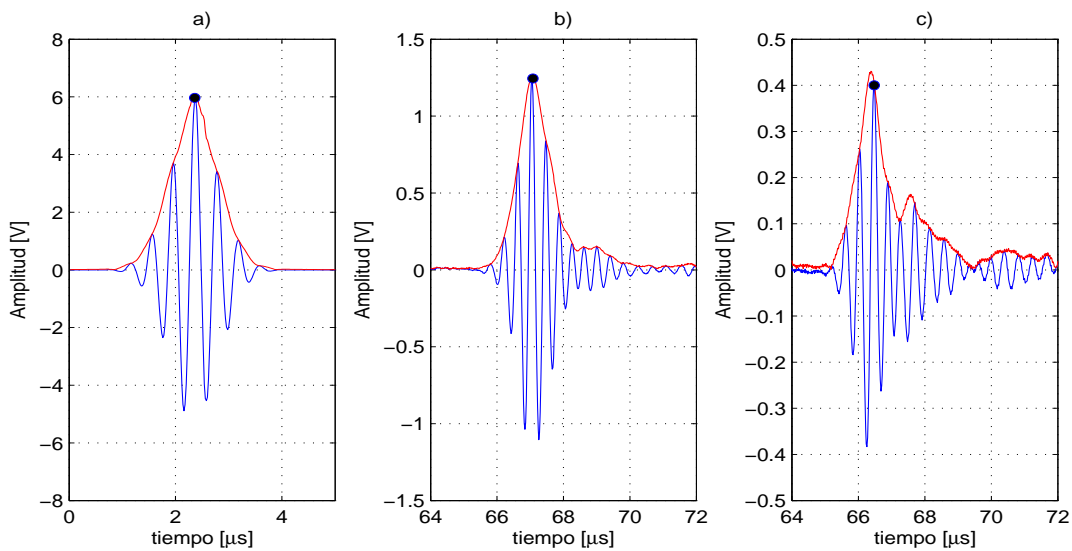
Por otra parte, el método de la correlación cruzada ha sido ampliamente utilizado en la determinación del tiempo de vuelo mediante el cálculo de la función de correlación entre dos señales (Guerjouma et al, 1992; Parrilla et al, 1991). El valor máximo en esta función revela el retardo entre las señales. La función de correlación cruzada en su representación discreta  $r_{xy}$  dada una señal emitida  $x[n]$  de referencia y una señal recibida  $y[n]$  es expresada en función del índice de retardo  $l$ , como sigue:

$$r_{xy}(l) = \sum_n x[n]y[l+n] \quad (5.3.11)$$

Otra forma de calcular la función de correlación cruzada es por medio de TF:

$$r_{xy} = \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F}\{x[n]\} \mathcal{F}^* \{y[n]\} \} \quad (5.3.12)$$

donde  $\mathcal{F}^* \{y[n]\}$  es el complejo conjugado de  $\mathcal{F}\{y[n]\}$ . Como se verá enseguida, la detección de la envolvente y el método de la correlación cruzada son muy sensibles a la distorsión en amplitud que sufre una señal que viaja por un medio dispersivo. En la Figura 5.7 se presentan el pulso ultrasónico emitido a 2.5MHz y los recibidos de una muestra de mortero de baja dispersión (concentración de dispersores  $\phi = 13.4\%$  y tamaño  $a = 1$  [mm], véase Figura 5.9b) y otra de más alta ( $\phi = 38.1\%$  y tamaño  $a = 1$  [mm], véase Figura 5.9d) donde se superponen sus respectivas envolventes. Como se observa en estos gráficos, a medida que aumenta la concentración de dispersores, el material se considera más dispersivo, el resultado de la función de la correlación cruzada (punto negro) no coincide con el valor máximo de la envolvente. Se observa que el pulso sufre una distorsión en amplitud, y por consiguiente en su envolvente cuando el material es más dispersivo. La posición del máximo de la envolvente representa el tiempo de vuelo asociado a la velocidad de grupo, descartando este método para nuestro caso así como también poniendo de manifiesto que la determinación del tiempo de vuelo mediante valores de amplitud no es la mejor alternativa como se ejemplifica en el siguiente apartado.



**Figura 5.7.** Detección de la envolvente de a) un pulso ultrasónico emitido a 2.5MHz (señal de referencia), y de los pulsos recibidos al viajar por muestras de mortero con tamaño de agregados de  $a = 1$  [mm] a concentración de dispersores de b)  $\phi = 13.4\%$  y c)  $\phi = 38.1\%$ .

### 5.3.2.2. Método de detección de cruces por cero

Este método consiste básicamente en la detección sobre el eje temporal de los puntos del pulso ultrasónico que cruzan por cero. En otras palabras, el cruce por cero es un punto donde el signo de la amplitud de una señal cambia. La detección de los puntos de fase que cruzan por cero de un pulso ultrasónico se determinan a partir de un umbral asignado. Comúnmente se emplean el primero y segundo cruce por cero que supera el umbral de detección. Estos puntos son de pendiente máxima por lo que utilizando técnicas de interpolación se pueden obtener medidas de tiempo inferiores a una muestra. El método de detección de cruces por ceros puede decirse que es independiente de la distorsión en amplitud que sufren los pulsos al viajar en un medio dispersivo, siempre y cuando se elija correctamente el umbral de detección. Las posibles variaciones frecuenciales de los pulsos transmitidos pueden ser compensadas mediante una corrección denominada *doble cruce por cero*, obtenida como:

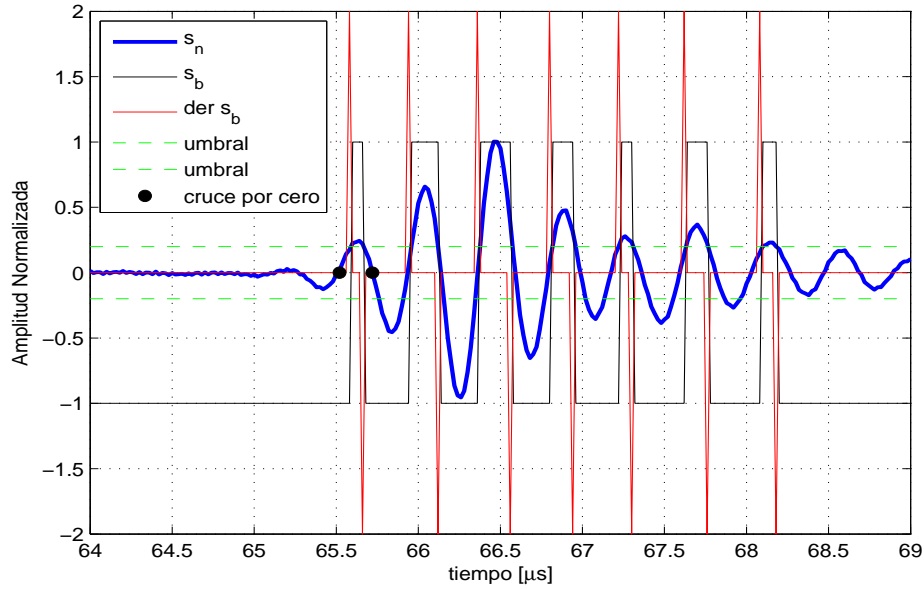
$$t_{dcc} = t_1 + \Delta t_{cc} \quad (5.3.13)$$

donde  $t_1$  es la posición temporal del primer cruce por cero y  $\Delta t_{cc}$  es la diferencia entre las posiciones del primer y segundo cruce por cero. El procedimiento para la detección de los cruces por cero se describe como sigue: Dado un pulso ultrasónico en su representación discreta  $s[n]$  es normalizado  $s_n[n]$ , y binarizado con respecto a un umbral  $\eta$ :

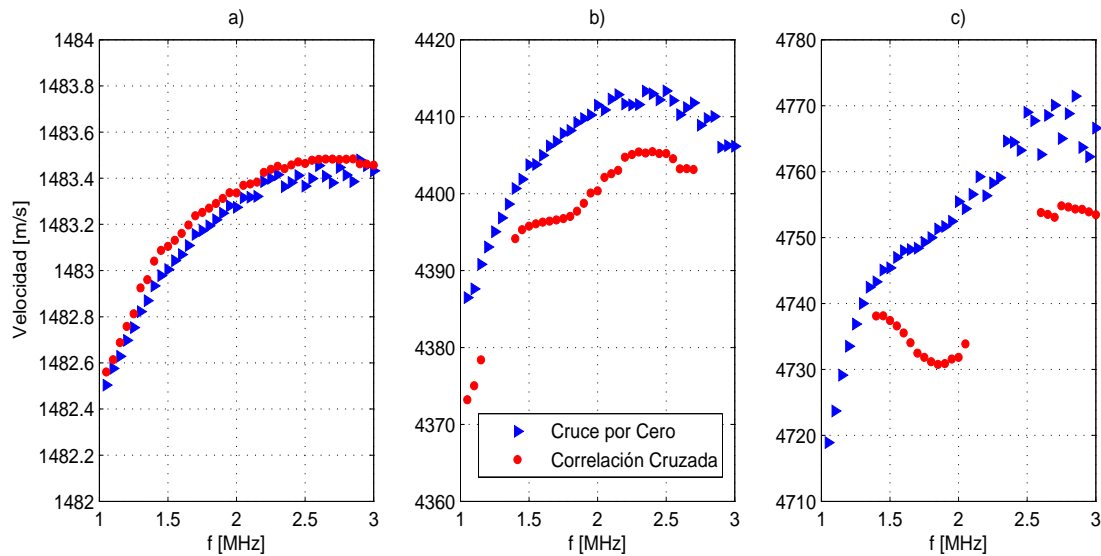
$$s_b[n] = \begin{cases} 1 & s_n[n] > \eta \\ -1 & s_n[n] \leq -\eta \end{cases} \quad (5.3.14)$$

Posteriormente, se deriva la señal binaria  $s_b[n]$  donde los puntos con pendiente máxima están asociados a los cruces por cero. Sin embargo, estos puntos corresponden a los cruces por cero de la señal binaria con respecto al umbral por lo que es necesario reestablecer la correcta posición de éstos con respecto al pulso original. Esta corrección se realiza mediante un proceso de interpolación donde se busca los valores de cero del pulso original según el cambio de signo en la vecindad de los cruces por cero anteriormente obtenidos. Este procedimiento se ilustra con el ejemplo mostrado en la Figura 5.8 donde se observa el pulso normalizado (línea continua azul), la señal binarizada (línea continua negra), la derivada de ésta (línea continua roja), los valores de umbral ( $\eta = 0.2$ , línea discontinua verde) y los dos primeros cruces por cero detectados (puntos negros).

En la Figura 5.9 se muestra una comparación entre la técnica de la correlación cruzada y la detección de cruce por cero para el cálculo de la velocidad.



**Figura 5.8.** Ejemplo de la detección de cruces por cero.



**Figura 5.9.** Comparativa entre la técnica de la correlación cruzada y la detección de cruce por cero para la determinación de la velocidad de fase dependiente de la frecuencia. Medición de la velocidad en: a) agua, b) mortero con  $\phi = 13\%$  y  $a=1$  [mm] de microesferas de vidrio y c) mortero con  $\phi = 38\%$  y  $a=1$  [mm] de microesferas de vidrio.

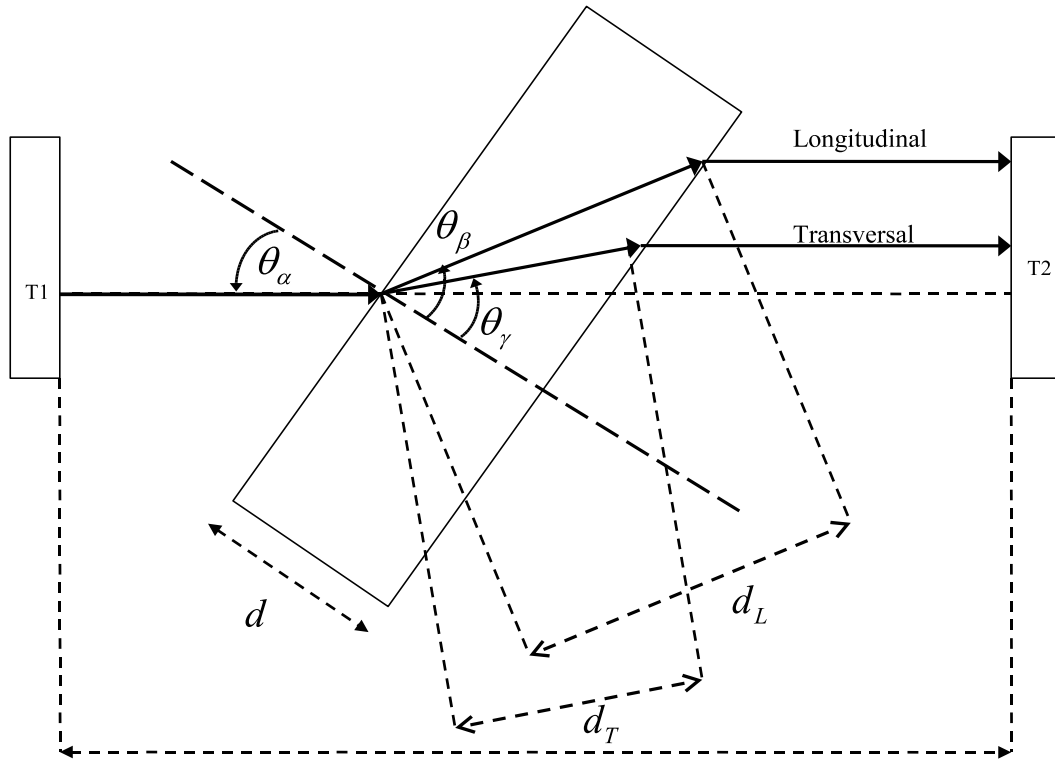


En estos gráficos se observa que en medios homogéneos como es el agua (véase Figura 5.9a) los dos métodos presentan resultados similares, pero no comportándose igual a medida que el medio es más dispersivo (véanse Figuras 5.9b y 5.9c). Los valores de velocidad ausentes en las curvas respectivas a la técnica de correlación se han salido del rango mostrado en estas figuras ya que esta técnica es muy sensible a la distorsión en amplitud lo que conlleva a una detección errónea de los puntos máximos y mínimos de los pulsos. En resumen, el método de la detección de cruces por cero es independiente de la distorsión en amplitud que sufren los pulsos en medios dispersivos y su eficacia sólo está condicionada a que se elija un adecuado umbral de detección. En este trabajo se utiliza el método de cruce por cero para la determinación del tiempo de vuelo.

### 5.3.3. Medición de la Velocidad Transversal

Como se ha descrito en el capítulo 4 los modelos de dispersión, y en especial los coeficientes de dispersión están en función de los números de onda longitudinal y transversal de la matriz y de las inclusiones. Por ello, además de medir la velocidad longitudinal de la matriz es necesario también la medición de la velocidad transversal de ésta. En una inspección en transmisión, dado un acoplamiento por contacto, esta medición se realiza de igual forma que la velocidad longitudinal usando un par de transductores diseñados para la emisión de ondas transversales. Sin embargo, en una inspección por transmisión en inmersión ha de utilizarse un procedimiento (Bueno et al, 2008) como a continuación se detalla ya que las ondas transversales no pueden propagarse en un medio fluido como es el agua.

Dado un pulso ultrasónico que incide oblicuamente sobre una interfase o superficie que delimita dos diferentes medios (agua-material) con un ángulo  $\theta_\alpha$  respecto a la perpendicular, se generan ondas transmitidas y reflejadas cuyos ángulos dependen a su vez del ángulo de incidencia y de la velocidad acústica en ambos medios (véase Figura 5.10). En esta figura se observa que se ha girado la probeta para que el pulso emitido incida oblicuamente de forma que el transductor receptor reciba simultáneamente la onda longitudinal y la onda transversal que viajó por el material. Aplicando las leyes de Snell para los dos tipos de ondas transmitidos se obtiene que:



**Figura 5.10.** Configuración para la medición de las ondas transversales.

$$V_L = \frac{d_L}{t_L - t_w + \frac{d_L}{V_w}} \quad (5.3.15)$$

$$V_T = \frac{d_T}{t_T - t_w + \frac{d_T}{V_w}} \quad (5.3.16)$$

$$\frac{V_L}{V_T} = \frac{\text{sen}(\theta_\beta)}{\text{sen}(\theta_\gamma)} \quad (5.3.17)$$

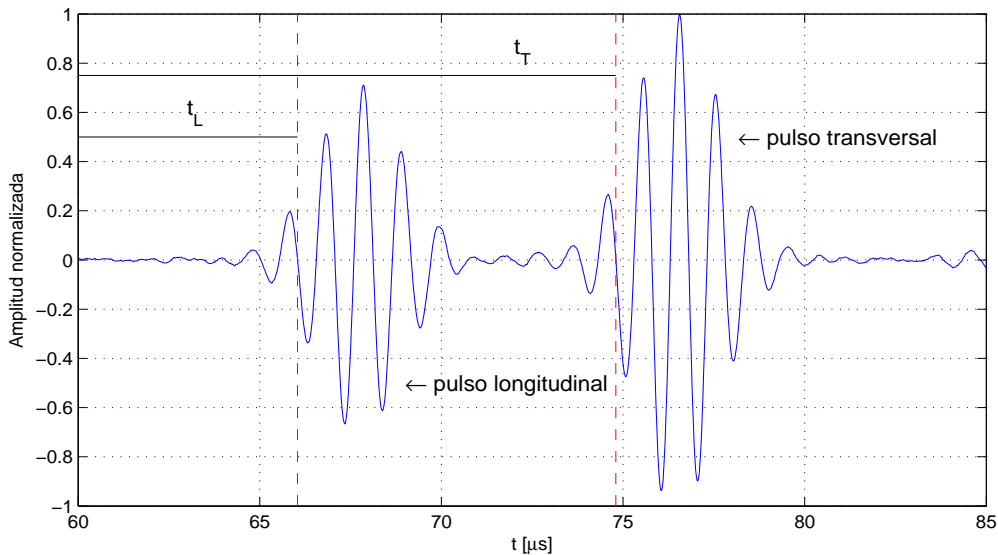
con

$$d_L = \frac{d}{\cos(\theta_\beta)} \quad (5.3.18)$$

$$d_T = \frac{d}{\cos(\theta_\alpha)} \quad (5.3.19)$$

donde  $d_L$ ,  $t_L$  y  $\theta_\beta$  son respectivamente el espacio recorrido, el tiempo empleado y el ángulo de transmisión de la onda longitudinal al atravesar la probeta,  $d_T$ ,  $t_T$ , y  $\theta_\gamma$  son los valores correspondientes para la onda transversal y  $V_w$  es la velocidad en el agua;  $V_L$  y  $V_T$  son los va-

lores de la velocidad longitudinal y transversal respectivamente. Si consideramos al material isotrópico,  $V_L$  no varía con la dirección y es por tanto un valor que puede ser fácilmente medido (probeta sin girar). Como los valores de  $t_L$ ,  $t_T$  pueden ser obtenidos experimentalmente a partir de la señal transmitida como se muestra en la Figura 5.11, es posible calcular la velocidad transversal  $V_T$ , sin necesidad de conocer el ángulo de incidencia y resolviendo el sistema de ecuaciones de tres incógnitas ( $V_T, \theta_\beta, \theta_\gamma$ ) descrito por las expresiones (5.3.15)-(5.3.17). Esta metodología puede ser aplicable para medir la velocidad transversal dependiente de la frecuencia resolviendo el sistema de ecuaciones para cada uno de los pulsos de banda estrecha emitidos en el intervalo de frecuencias deseados.



**Figura 5.11.** Ondas longitudinal y transversal transmitidas. Incidencia oblicua.

#### 5.4. Determinación de la Atenuación Ultrasónica

Determinar la atenuación de una onda mecánica no es una tarea fácil ya que depende en gran medida de la geometría de la pieza en inspección y sobre todo del tipo de acoplamiento y presión ejercida entre el transductor y la pieza utilizada. Realizando mediciones en inmersión queda solucionada la problemática de la pérdida de energía debido al tipo de acoplamiento y las variaciones en la medida por la variación de presión de contacto. En una inspección por transmisión en inmersión, la atenuación ultrasónica dependiente de la frecuencia  $\alpha(\omega)$  puede ser determinada mediante la respuesta en frecuencia de un pulso que se propaga en una pieza de espesor  $d$  y la respuesta en frecuencia de una señal de referencia, comúnmente, un pulso

emitido y recibido con el mismo par de transductores que el anterior pero propagándose solamente en agua. Asumiendo que la respuesta del sistema de medición es lineal, la señal de referencia en agua tiene por respuesta (Droin et al, 1998):

$$A_w(\omega) = A_0(\omega)A_{D_w}(\omega) \quad (5.4.1)$$

donde  $A_0(\omega)$  es la función de transferencia que incluye el espectro de amplitud de la señal eléctrica y la funciones de transferencia eléctrica y mecánica de los transductores de emisión y recepción.  $A_{D_w}(\omega)$  es la función de transferencia que caracteriza el efecto de propagación del pulso ultrasónico en agua y la difracción en agua. Este término es dependiente de las propiedades geométricas y frecuenciales de los transductores así como también de las propiedades acústicas del medio de acoplamiento. El pulso ultrasónico que ha viajado por la pieza tiene por respuesta en frecuencia:

$$A_s(\omega) = A_0(\omega)T(\omega)A_{D_s}(\omega)e^{-\alpha(\omega)d} \quad (5.4.2)$$

donde  $A_{D_s}(\omega)e^{-\alpha(\omega)d}$  es la función de transferencia que caracteriza el efecto de propagación del pulso ultrasónico sobre la interfase agua-espécimen-agua. El término  $e^{-\alpha(\omega)d}$  describe la atenuación debido a la presencia de una pieza de espesor  $d$ ;  $T(\omega)$  se refiere al producto del coeficiente de transmisión para las interfases agua-espécimen y espécimen-agua:

$$T(\omega) = \frac{4Z_w Z_s(\omega)}{[Z_w(\omega) + Z_s(\omega)]^2} \quad (5.4.3)$$

donde  $Z_w = \rho_w V_w$  y  $Z_s(\omega) = \rho_s V_s(\omega)$  son las impedancias acústicas del agua y la muestra, respectivamente,  $V_w$  y  $V_s(\omega)$  sus velocidades longitudinales,  $\rho_w$  y  $\rho_s$  las densidades de éstos. Se puede definir la atenuación aparente  $\hat{\alpha}(\omega)$ , en escala logarítmica, como (Chaffai et al, 1998):

$$\hat{\alpha}(\omega) = -\frac{1}{d} \log \left( \frac{\hat{A}_s}{\hat{A}_w} \right) \quad (5.4.4)$$

donde  $\hat{A}_s$  y  $\hat{A}_w$  son las respuestas en frecuencia medidas del pulso que viaja por la pieza y el de referencia, respectivamente. Por tanto, la atenuación<sup>1</sup> puede ser obtenida como<sup>2</sup>:

$$\alpha(\omega) = \hat{\alpha}(\omega) + \frac{1}{d} \left[ \log(|T(\omega)|) + \log \left( \frac{|A_{D_s}|}{|A_{D_w}|} \right) \right] \quad (5.4.5)$$

<sup>1</sup>Cabe señalar que esta medida de atenuación corresponde a la suma de los mecanismos de absorción y dispersión de energía, véase §3.3.4.

<sup>2</sup>Esta expresión viene dada en unidades de [Np/unidades de longitud], por lo que si se desea expresar la atenuación en [dB/unidades de longitud], sólo se multiplica el factor 8.68 a la ecuación.

donde  $A_{D_s}$  y  $A_{D_w}$  son las magnitudes de las funciones complejas de corrección del efecto de difracción.

#### 5.4.1. Corrección por difracción

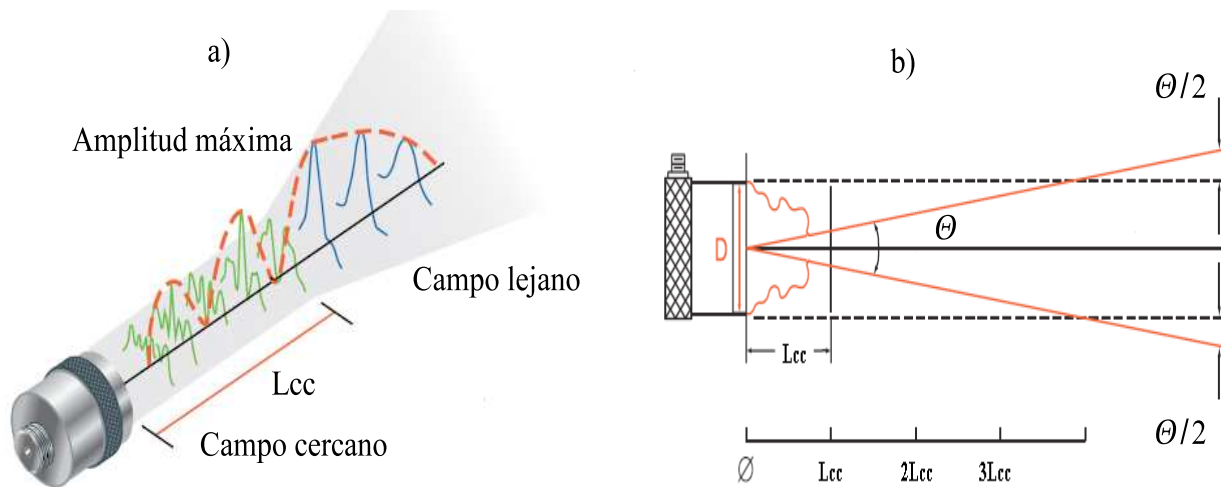
El efecto de la difracción es causado por la divergencia o apertura del haz ultrasónico y como consecuencia afecta al patrón de radiación del campo acústico generado por el transductor. El campo acústico generalmente es dividido en dos regiones de interés: el campo cercano o zona de Fresnel y el campo lejano o zona de Fraunhofer. El primero es la región contigua al transductor donde la amplitud del pulso ultrasónico varía aleatoriamente debido a la difracción causado por los bordes del mismo y afecta a la distribución de la presión acústica. En el segundo, el campo de radiación decrece linealmente con la distancia a lo largo del eje principal de propagación y es la región uniforme del campo acústico del transductor. La delimitación entre estas dos regiones está determinado por el punto focal (ver Figura 5.12a) del transductor calculado como:

$$L_{cc} = \frac{D^2 f}{4V} \quad (5.4.6)$$

donde  $D$  es el diámetro del transductor,  $f$  la frecuencia de emisión y  $V$  la velocidad del medio. El ángulo de apertura del haz (ver Figura 5.12b) puede ser obtenido como (detectado a 6dB) (Panametrics, 2006):

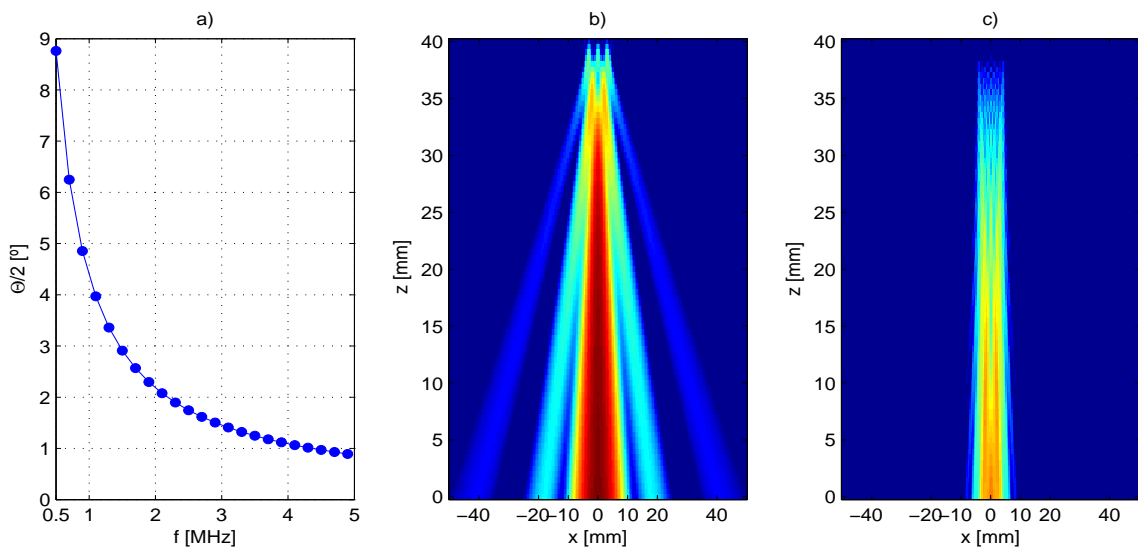
$$\text{sen}(\Theta/2) = \frac{0.514V}{Df} \quad (5.4.7)$$

De acuerdo a la configuración de inspección utilizada en este trabajo, véase Figura 5.2, la



**Figura 5.12.** Campo Acústico de un transductor (Panametrics, 2006). a) Esquema de sus regiones y b) apertura del campo.

distancia de separación entre los transductores es de  $L=122.6$  [mm] y la pieza está centrada entre éstos, por lo que el ángulo de apertura no es mayor a  $9^\circ$  considerando un intervalo de frecuencias de emisión de 0.5-5MHz, y con una variación como se muestra en la Figura 5.13a. Por tanto, ya que la probeta tiene una anchura de 40 [mm] puede decirse que la mayor concentración de energía se dirige al punto deseado en el material como se muestra en las Figuras 5.13b y 5.13c. No obstante a medida que disminuye la frecuencia, la divergencia de haz es cada vez mayor por lo que es conveniente aplicar la corrección de difracción. Muchos autores han estudiado el efecto de la difracción resultando diversas formulas de



**Figura 5.13.** Apertura y campo acústico de un haz ultrasónico en onda continua que viaja en agua a lo largo del eje  $z$ . a) variación de la apertura del campo acústico a distintas frecuencias de emisión en el agua. Campo acústico del haz con frecuencias de emisión: b) 0.5 MHz y c) 2.5 MHz. Los valores están dados en decibelios y el cero de los ejes  $x, y$  representan el punto central de la probeta con anchura de 40[mm].

corrección Bass (1958); Fink y Cardoso (1984); Rogers y Van-Buren (1974); Seki et al (1956); Xu (1993), sin embargo, la formulación dada por Rogers y Van-Buren (1974) proporciona una expresión sencilla de las funciones de corrección de difracción que puede utilizarse para el caso de un transductor circular plano de diámetro  $D$ , haciendo uso de la siguiente expresión:

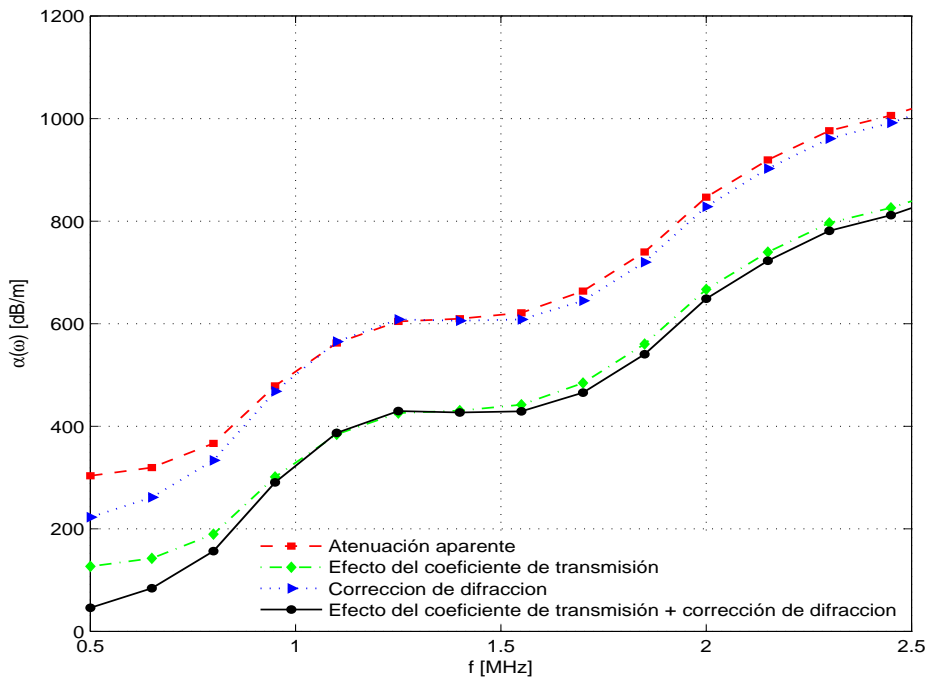
$$D_L(s) = 1 - e^{-i(2\pi/s)} \left[ J_0\left(\frac{2\pi}{s}\right) + iJ_1\left(\frac{2\pi}{s}\right) \right] \quad (5.4.8)$$

donde  $J_0$  y  $J_1$  son las funciones de Bessel ordinarias de primera especie y orden cero y uno, respectivamente; el argumento  $s = \frac{zV}{fD^2}$  depende de la velocidad del medio  $V$ , la distancia  $z$ , el diámetro  $D$  del transductor, y  $f$  la frecuencia de emisión. De este modo, las funciones complejas de corrección del efecto de difracción  $A_{D_s}$  y  $A_{D_w}$  que se emplean en la expresión (5.4.5) son calculadas como  $A_{D_s} = D_L(s_s)$  y  $A_{D_w} = D_L(s_w)$ , respectivamente, donde el argumento  $s$  en cada caso vienen dadas por (He y Zheng, 2001):

$$s_s = \frac{LV_w}{fD^2} \quad (5.4.9)$$

$$s_w = \frac{(L-d)V_w + dV_s(\omega)}{fD^2} \quad (5.4.10)$$

donde  $L$  es la distancia entre transductores,  $d$  es el espesor de la muestra,  $V_w$  y  $V_s(\omega)$  la velocidad en el agua y en la probeta, respectivamente.



**Figura 5.14.** Influencia del coeficiente de transmisión y corrección de difracción sobre la atenuación aparente.

En la Figura 5.14 se ilustra un ejemplo de la influencia del coeficiente de transmisión y la corrección de difracción sobre la medida de la atenuación aparente (trazo discontinuo rojo) como se definió en (5.4.5), donde el trazo continuo negro se refiere a la determinación

de la atenuación buscada  $\alpha(\omega)$ . Se observa de este gráfico que la influencia del coeficiente de transmisión prácticamente actúa de forma constante en todo el rango de frecuencias mostrado, resultando una diferencia de 180 [dB/m] por lo que no debe de ser despreciable si lo que se requiere es una medición precisa y absoluta de la curva de atenuación. En cuanto a la corrección de la difracción, sólo se observan diferencias significativas por debajo de 1 MHz, (80dB/m a 0.5MHz).

En la siguiente sección se describen diferentes técnicas de excitación para la determinación de la atenuación. Cabe señalar que se muestran las expresiones para la obtención de la atenuación aparente por lo que será necesario aplicar las correspondientes correcciones debidas al coeficiente de transmisión y de difracción usando (5.4.5).

#### 5.4.2. Mecanismos de absorción y dispersión sobre las medidas de atenuación total

Hay que notar que la atenuación medida y corregida por los efectos transmisión y difracción es la suma de los dos mecanismos de atenuación: atenuación por absorción y dispersión. McClements (1996) y Biwa (2001) han puesto de manifiesto que la presencia de inclusiones, con una fracción de volumen  $\phi$  influye sobre la absorción de la matriz del material compuesto de acuerdo al factor  $(1 - \phi)$ , por lo que en este trabajo se considera que la atenuación total es:

$$\alpha(\omega) \cong \alpha_{sc}(\omega) + \left(1 - \sum_j \phi_j\right) \alpha_{ab}(\omega) \quad (5.4.11)$$

tomando en cuenta la fracción de volumen de los  $j$  diferentes tipos de inclusión,  $\alpha_{sc}(\omega)$  es la atenuación por dispersión de los  $j$  tipos de inclusiones y  $\alpha_{ab}(\omega)$  es la atenuación por absorción de la matriz cementicia. Esta expresión omite las contribuciones de atenuación por absorción debidas a las mismas inclusiones o cavidades por considerar a las primeras como homogéneas y no atenuantes, en cuanto a las últimas, como la mayor parte de la energía asociada al pulso ultrasónico es reflejado por las cavidades (atenuación por dispersión), se asume que el pulso no viaja a través de las mismas, debido a las diferencias muy grandes entre las impedancias acústicas.

#### 5.4.3. Técnicas de excitación

De forma similar a la velocidad, las dos técnicas descritas en §5.3.1 pueden usarse para la determinación de la atenuación: 1) pulso de banda ancha y 2) un conjunto de pulsos de banda estrecha con diferentes frecuencias centrales, pero además se incluye una tercera que



ha sido la elegida para la determinación de la atenuación en este trabajo, 3) pulso sinusoidal con barrido lineal de frecuencias. Las tres técnicas son descritas a continuación. La primera, es la técnica más utilizada ya que con un único pulso de banda ancha que se propague a través de la pieza a inspeccionar y uno de referencia (por ejemplo, ver Figuras 5.3a, 5.3b, 5.3c y 5.3d) puede determinarse la atenuación mediante los respectivos espectros recibidos, usando simplemente la expresión (5.4.5). Sin embargo, este pulso ultrasónico concentra su máxima energía en la frecuencia de resonancia para la que fue diseñado el transductor y el ancho de banda está condicionado por las características que ha dado el fabricante. La segunda técnica, como se ha mencionado anteriormente, consiste en generar un conjunto de pulsos de banda estrecha (6-8 ciclos) a determinadas frecuencias (véase Figura 5.5). Se pretende que el transductor oscile a las frecuencias deseadas, que la mayor parte de la energía se concentre alrededor de dichas frecuencias, mejorándose la relación señal ruido. Por tanto, la atenuación se calcula mediante esta técnica como la proporción entre la amplitud máxima del pulso recibido o el punto máximo de la envolvente de la señal a esa frecuencia con respecto a la señal de referencia que también ha sido medida en dicha componente frecuencial, obteniéndose una curva discreta de atenuación; por ejemplo, para la atenuación aparente:

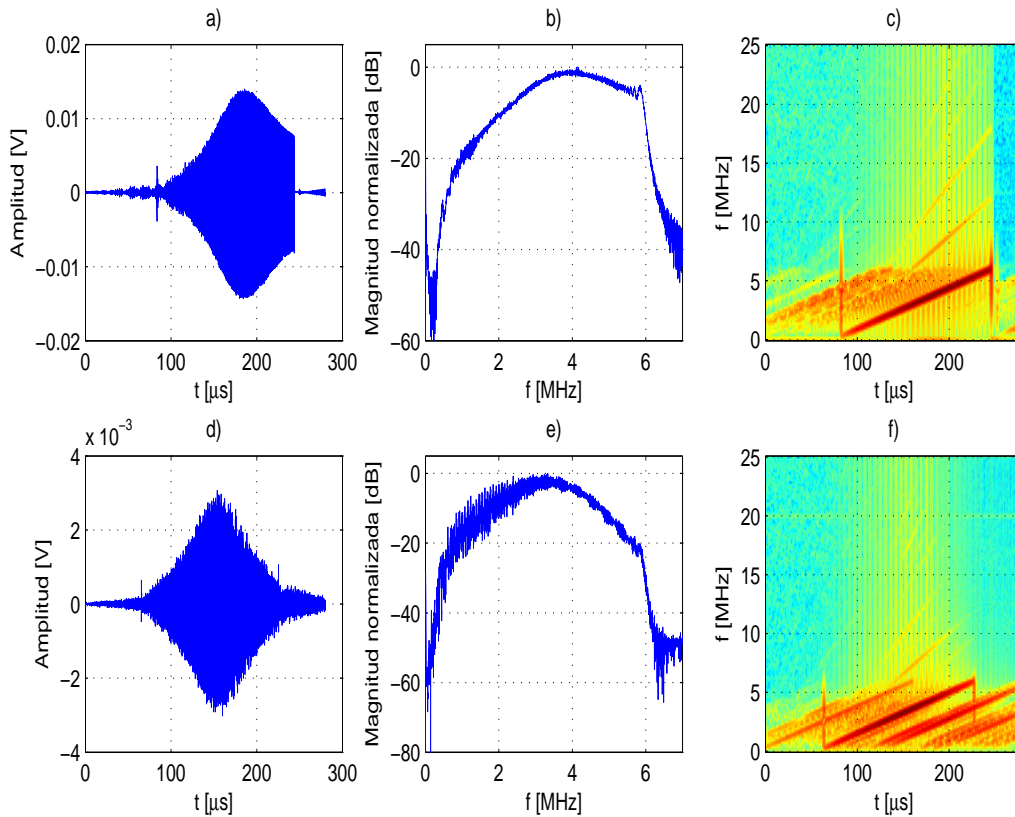
$$\hat{\alpha}^{(f)} = -\frac{1}{d} \log \left( \frac{\max\{A_s^{(f)}(t)\}}{\max\{A_w^{(f)}(t)\}} \right) \quad (5.4.12)$$

donde  $\hat{\alpha}^{(f)}$  es un punto de la curva de atenuación debido a un pulso de banda estrecha emitido a una frecuencia central  $f$ ,  $A_s^{(f)}(t)$  y  $A_w^{(f)}(t)$  son las envolventes del pulso recibido que viajó por la pieza y el de referencia, respectivamente.

En la sección siguiente se presenta una comparativa entre las técnicas descritas en este trabajo para la determinación de la atenuación total aparente, pero antes se describirá la técnica de barrido lineal de frecuencia que es la utilizada en la presente tesis.

#### 5.4.3.1. Técnica de barrido lineal de frecuencia

La tercera técnica consiste en la generación de una señal sinusoidal con un barrido lineal de frecuencia en un intervalo de frecuencia deseado, como se muestra en la Figura 5.15. Esta técnica permite, con tan sólo un pulso eléctrico, excitar al transductor sobre un gama amplia de frecuencias, de tal forma que el transductor oscilará en cada una de estas frecuencias con una concentración energética mayor que utilizando un pulso sinusoidal de banda ancha. La elección de esta señal tiene ventajas y desventajas como se observa de estos gráficos.



**Figura 5.15.** Señales de barrido lineal de frecuencia: a), b) y c) señal temporal en agua, su espectro y representación tiempo-frecuencia, respectivamente, d), e) y f) señal temporal que se propagó en una muestra de mortero, su espectro y representación tiempo-frecuencia. Los gráficos correspondientes a la representación tiempo-frecuencia fueron obtenidos mediante la Transformada de Fourier de tiempo corto. En los espectrogramas se observa tanto en el inicio como en el final de las señales “chirp”, componentes de banda ancha que son causadas por el inicio y el fin de la oscilación del transductor de 5MHz.

En primer lugar se tiene que señalar que la primera señal “chirp” se genera a causa de la inducción electromagnética entre canales, la segunda es propiamente la señal generada por el transductor, mientras que las consecutivas son las señales producidas por las reflexiones en la cara posterior de la probeta. Estas señales de reflexión son la desventaja de emplear este tipo de técnica debido a que la señal de excitación es de larga duración. No obstante este hecho tiene fácil solución ya que la señal “chirp” es idónea para tratarla en el espacio tiempo-frecuencia, y por consiguiente mediante un proceso de filtrado y detección puede extraerse adecuadamente la señal chirp requerida sin componentes frecuenciales indeseables.

La atenuación aparente puede ser determinada mediante la siguiente expresión:

$$\hat{\alpha}(\omega) = -\frac{1}{2d} \log \left( \frac{E_s(\omega)}{E_w(\omega)} \right) \quad (5.4.13)$$

donde  $E_s(\omega)$  y  $E_w(\omega)$  son los espectros de máxima energía de los pulsos de propagación en la pieza y en el agua, respectivamente. La estimación de  $E_s(\omega)$  y  $E_w(\omega)$  se realiza mediante el cálculo de los marginales de frecuencia de la función de densidad de mayor concentración energética, como:

$$E_x(\omega) = \int \widehat{\text{SPWV}}_x(t, \omega) dt \quad (5.4.14)$$

donde el subíndice  $x$  indica la señal en cuestión,  $s$  o  $w$ ,  $\widehat{\text{SPWV}}_x(t, \omega)$  denota la distribución de pseudo-Wigner-Ville suavizada y umbralizada definida como:

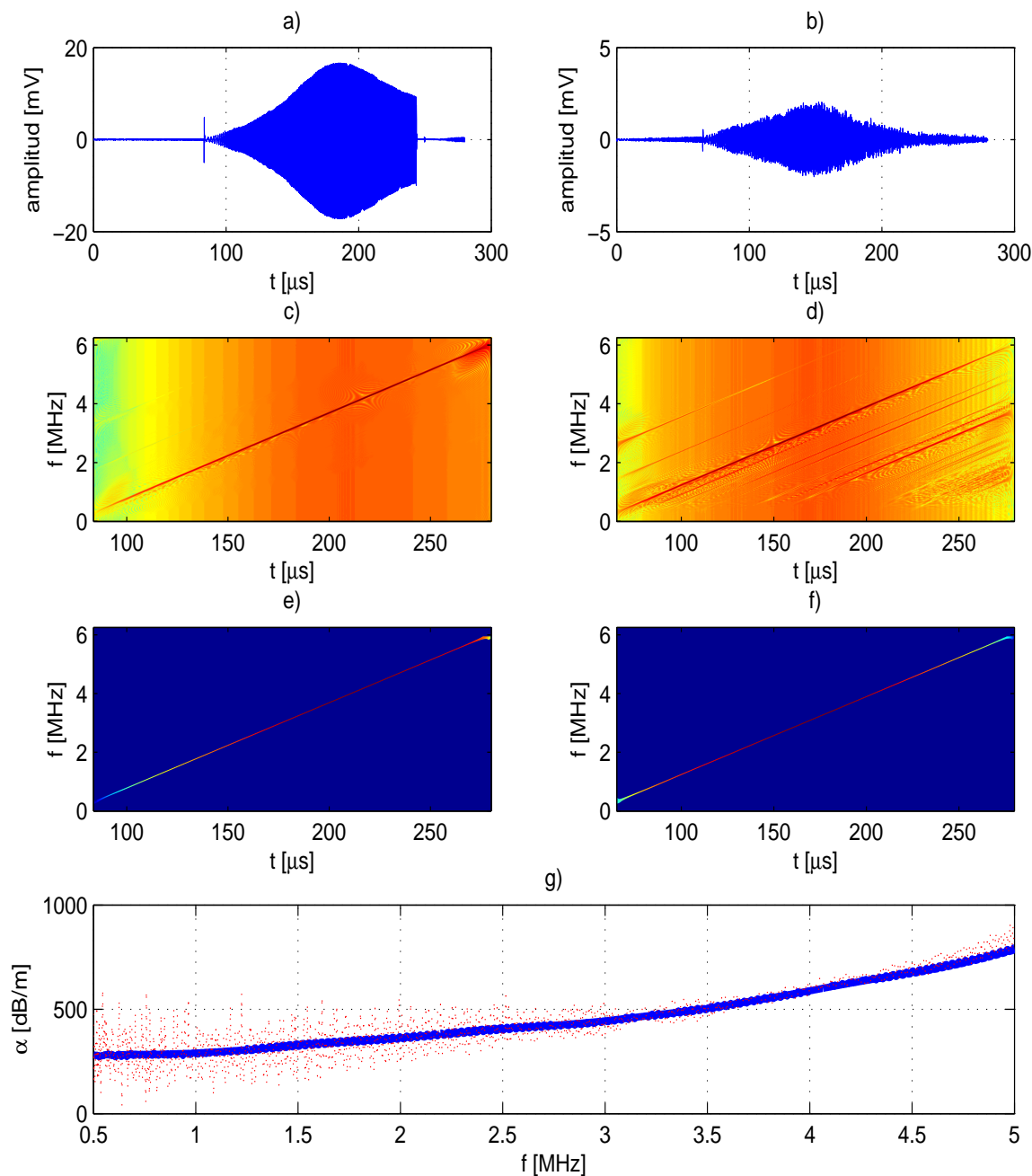
$$\widehat{\text{SPWV}}_x(t, \omega) = \begin{cases} \text{SPWV}_x(t, \omega) & \text{SPWV}_x(t, \omega) \geq \eta \\ 0 & \text{SPWV}_x(t, \omega) < \eta \end{cases} \quad (5.4.15)$$

con la siguiente definición de la distribución pseudo-Wigner-Ville suavizada (Auger y Flandrín, 1995):

$$\text{SPWV}_x(t, \omega) = \int h(\tau) \int g(\nu - t) x_a\left(\nu + \frac{\tau}{2}\right) x_a^*\left(\nu - \frac{\tau}{2}\right) e^{-i\omega\tau} d\nu d\tau \quad (5.4.16)$$

donde  $h$  y  $g$  son las ventanas frecuencial y temporal de suavizado y  $x_a$  la señal analítica de las señales en cuestión determinada por la ecuación (5.3.8). Con el fin de detectar el contenido energético más representativo de la distribución tiempo-frecuencia se ha elegido un nivel de umbral  $\eta$  de igual valor que la mitad de la máxima energía de las señales. Además, la localización temporal y frecuencial de las señales está bien definida por lo que puede usarse una máscara que limite la vecindad de este proceso o bien una detección de la señal *chirp* mediante la Transformada Hough como ha sido planteada por Berriman et al (2006).

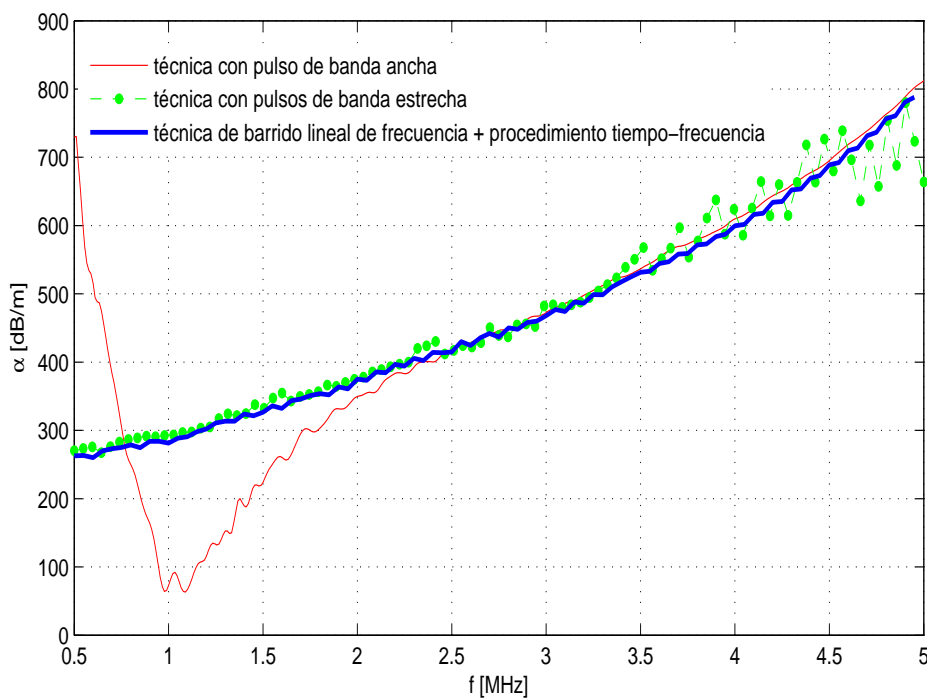
En la Figura 5.16 se resume el procedimiento tiempo-frecuencia propuesto. Como se observa en estos gráficos, se consigue una mejor estimación de la curva de atenuación mediante este procedimiento, si se compara con la utilización del espectro sin procesar de las señales, especialmente en bajas frecuencias. Otra ventaja de este procedimiento es la capacidad de distinguir con gran precisión la localización en el espacio tiempo-frecuencia de los pulsos de transmisión con respecto a los reflejados por las paredes de la probeta, por lo que puede usarse también para medir la atenuación de las ondas transversales usando la configuración presentada en §5.3.3.



**Figura 5.16.** Ejemplo del procedimiento tiempo-frecuencia propuesto: a) señal temporal propagada en agua  $x_w$ , b) señal temporal que se propaga en el espécimen  $x_s$ , c) Representación tiempo-frecuencia  $SPWV_w(t, \omega)$  de  $x_w$ , d)  $SPWV_s(t, \omega)$  de  $x_s$ , e) y f)  $SPWV_x(t, \omega)$  de  $x_w$  y  $x_s$ , respectivamente para  $\eta$  igual a la mitad de la máxima energía, y g) Estimación de la atenuación aparente total mediante la obtención de los marginales de frecuencia (trazo continuo azul) y a partir de la Transformada de Fourier discreta (trazo discontinuo rojo).

En la Figura 5.17 se muestra una comparación entre las tres técnicas anteriormente descritas, observando que todas coinciden en un intervalo de frecuencias de 2.5-4 MHz, pero la técnica que emplea un pulso de banda ancha no consigue una buena estimación de la atenuación a frecuencias menores de 2MHz, y la técnica que usa el conjunto de pulsos de banda estrecha, a partir de los 4 MHz pierde precisión. Aunque se logre aumentar la relación señal ruido en altas frecuencias para mejorar las prestaciones de la técnica de pulsos de banda estrecha, o bien mejorar la estimación del ajuste lineal de fase, véase expresión (5.3.2), para emplear la técnica del pulso de banda ancha; la única técnica que es capaz de estimar la curva de atenuación en todo el intervalo de frecuencias 0.5-5MHz es el procedimiento tiempo-frecuencia propuesto aplicándolo a la señal de barrido lineal de frecuencia, “*chirp*”.

Cabe señalar que esta curva ha de corregirse con respecto a la contribución del coeficiente de transmisión y del efecto de difracción como se describió en §5.4.



**Figura 5.17.** Comparativa entre técnicas para la determinación de la atenuación aparente total.

## 5.5. Resumen

En este capítulo se ha abordado la descripción del sistema de adquisición y las técnicas de procesamiento de señal empleados para la medición de la velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia. Como se ha descrito, la técnica de detección de cruces por cero ofrece mejores prestaciones para la medición de la velocidad, mientras que la técnica de barrido lineal de frecuencias y el procedimiento tiempo-frecuencia propuesto brindan la mejor estimación para una adecuada determinación de la atenuación dependiente de la frecuencia. Asimismo, se ha estudiado las correcciones que deben ser realizadas por el efecto de transmisión entre la interfase agua-espécimen-agua y el efecto de difracción. En el siguiente capítulo se presentará la validación experimental del modelo N-fásico dinámico autoconsistente desarrollado y la metodología para la caracterización de materiales cementicios mediante la velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia.

---

## CAPÍTULO 6

# CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS MEDIANTE LA VELOCIDAD Y ATENUACIÓN ULTRASÓNICA

---

*En este capítulo se aborda la validación del modelo dinámico autoconsistente N-fásico mediante la comprobación experimental de las principales predicciones descritas en el estudio teórico acerca de la dispersión ultrasónica en materiales cementicios. Se expone una metodología que permite estimar parámetros microestructurales mediante la medida de la velocidad y de la atenuación ultrasónica dependientes de la frecuencia y el modelo dinámico autoconsistente N-fásico.*

### 6.1. Introducción

La comprensión de la dispersión ultrasónica producida por la heterogeneidad de los materiales cementicios y la descripción de este efecto en función de parámetros medibles, como son la velocidad y atenuación, permiten el establecimiento de métodos y técnicas para la caracterización de parámetros microestructurales de estos materiales. Por tal motivo, en el capítulo 4 se ha presentado el desarrollo del modelo dinámico autoconsistente N-fásico que ha sido utilizado para estudiar teóricamente la influencia del tamaño y concentración de los agregados y cavidades sobre perfiles de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia. Por tanto, mediante procesos de análisis-síntesis utilizando el modelo DAC N-fásico se proponen procedimientos para la caracterización de parámetros microestructurales de los materiales cementicios como son: los parámetros elásticos de la matriz cementicia y el tamaño y concentración tanto de los agregados como del aire ocluido.

Mediante el proceso de análisis se estiman ciertos parámetros microestructurales a partir de un proceso de minimización no lineal<sup>1</sup> de una función objetivo definida por las predicciones obtenidas por el MDAC N-fásico, y las medidas de velocidad y atenuación dependientes de

---

<sup>1</sup>Los procesos de optimización empleados en este trabajo utilizan el algoritmo de Levenberg-Marquardt mediante la función *lsqnonlin* incluida en la biblioteca de optimización de Matlab.

la frecuencia sobre los materiales a caracterizar. La función objetivo genérica que utilizan los diversos procedimientos propuestos a lo largo de este capítulo, se define como:

$$f(\bar{x}) = (1 - \beta) \sum_{\omega} \left[ V_L^{(th)}(\bar{x}, \omega) - V_L^{(exp)}(\omega) \right]^2 + \beta \sum_{\omega} \left[ \alpha_{tot}^{(th)}(\bar{x}, \omega) - \alpha_{tot}^{(exp)}(\omega) \right]^2 \quad (6.1.1)$$

donde  $V_L^{(exp)}$  y  $\alpha_{tot}^{(exp)}$  son las curvas de velocidad y atenuación experimentales,  $V_L^{(th)}(\bar{x}, \omega)$  y  $\alpha_{tot}^{(th)}(\bar{x}, \omega)$  son los perfiles de velocidad y atenuación total obtenidos por el modelo dinámico autoconsistente,  $\beta$  es un factor de escala que compensa las diferencias en magnitud que poseen las curvas de velocidad y atenuación cuyo valor se ha elegido como 0.05 para todos los procedimientos expuestos en este capítulo, y  $\bar{x}$  es un vector cuyas componentes son los parámetros microestructurales a estimar. Como se ha indicado en el capítulo 4, el modelo dinámico autoconsistente N-fásico proporciona solamente la atenuación por dispersión,  $\alpha_{sc}^{(th)}(\omega)$ , por lo que se deberá incluir la componente de atenuación por absorción como se ha expresando en la ecuación (5.4.11), procedimiento que se profundizará a lo largo de este capítulo. Por otra parte, en el proceso de síntesis se generarán las curvas teóricas de velocidad y atenuación a partir de los parámetros previamente estimados. De este modo se valida experimentalmente el modelo dinámico autoconsistente N-fásico y se desarrollan nuevas técnicas para la caracterización de los materiales cementicios.

## 6.2. Estudio experimental de la dispersión ultrasónica en materiales cementicios

### 6.2.1. Descripción de las probetas

Con el objetivo de caracterizar los materiales cementicios mediante la información proveniente de medidas de velocidad y atenuación con respecto a la frecuencia se han fabricado una serie de probetas de pasta de cemento y mortero con las características que se describen a continuación. Las probetas de pasta de cemento y mortero han sido fabricadas por dos entidades, una parte por el Instituto Tecnológico de la Construcción de la Comunidad Valenciana (AIDICO) siguiendo la metodología descrita en la norma UNE-EN-196-1:1996 y utilizando un tipo de cemento CEM I-42.5N<sup>2</sup>, y otra parte por el Laboratorio de Química de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puentes (ETSICCP) de la Universidad Politécnica de Madrid (UPM) siguiendo la misma norma pero usando un tipo de cemento CEM III/B SR/BC 32.5N<sup>3</sup>. La dimensión de las probetas es de 40×40×160 [mm<sup>3</sup>]. Se fabricaron dos conjuntos de probetas de mortero variando tanto la relación agua/cemento (w/c), la relación agregado/cemento (s/c) y la granulometría, donde el primer conjunto

---

<sup>2</sup>Cemento portland de clase resistente 42.5N.

<sup>3</sup>Cemento portland de clase resistente 32.5N con adición de escoria de alto horno.



corresponde a muestras de mortero fabricadas con microesferas de vidrio como agregados finos, mientras que en el segundo, las probetas de mortero fueron fabricados con granos de arena. En este trabajo se denominará probetas de mortero con microesferas de vidrio para las probetas del conjunto 1, mientras que las del conjunto 2 se les nombrará probetas de mortero con áridos. El primer conjunto ha sido clasificado en dos grupos según su relación agua/cemento, grupo I para (w/c):0.35 y grupo II para (w/c):0.40. En el segundo conjunto se varió la relación (w/c) para mantener en la medida de lo posible, matrices cementicias similares. En cuanto al tamaño de los agregados, en el primer conjunto se ha variado la granulometría de las probetas con microesferas de vidrio como: 0.09-0.15, 0.21-0.30, 1.0 [mm] de radio, mientras que para el segundo conjunto, mortero de arena, se varió como: 0.03-0.25, 0.25-0.50, 0.50-1.0, 0.03-1.0 [mm] de radio. También se fabricaron diferentes pastas de cemento, para poder obtener las constantes elásticas, velocidad y atenuación por absorción de las matrices cementicias correspondientes a las muestras de mortero con microesferas de vidrio. El procedimiento para la caracterización de estas matrices cementicias se describe más adelante en §6.4.1. El tipo de cemento empleado para la fabricación de las pastas de cemento fue CEM I-42.5N con relaciones agua/cemento de 0.35 y 0.40. En la Tabla 6.1 se presentan las proporciones de todas las probetas fabricadas.

La caracterización experimental de la microestructura porosa y medidas de densidad se presenta en el anexo C. La Tabla 6.1 muestra la proporción en peso de los agregados y cemento, así como la relación en peso del agua/cemento, por tanto, para determinar la fracción volumétrica nominal  $\phi_N$  de cada una de las probetas se emplea la siguiente expresión:

$$\phi_N = \frac{(s/c)}{\rho_s + \left[ \frac{\rho_s}{\rho_c} \right] + (w/c) \left[ \frac{\rho_s}{\rho_w} \right]} \quad (6.2.1)$$

donde  $\rho_w = 1000$  [kg/m<sup>3</sup>],  $\rho_c = 3400$  [kg/m<sup>3</sup>] y  $\rho_s$  son las densidades del agua, cemento y agregados (microesferas de vidrio o áridos), respectivamente. Las propiedades de las microesferas de vidrio (inclusiones elásticas) son las mostradas en la Tabla 4.4, mientras que las propiedades de los áridos son  $V_{L_s} = 5571$  [m/s],  $V_{T_s} = 3454$  [m/s],  $\rho_s = 2670$  [kg/m<sup>3</sup>],  $\mu_s = 33.52$  [GPa] y  $K_s = 38.18$  [GPa].

La nomenclatura utilizada con respecto a las probetas de mortero con microesferas y áridos se muestra en la Tabla 6.2, donde también se presentan sus respectivas granulometrías nomi-

(s/c)	(w/c)						
	0.35	0.38	0.40	0.45	0.46	0.52	0.65
0.00	▲		▲				
0.25	▲		▲				
0.50	▲		▲				
1.00	▲	▼	▲				
2.00				▼			
3.00					▼	▼	▼

▲ : tipo de cemento CEM I-42.5N  
Granulometrías en radio: 0.09-0.15, 0.21-30, 1.0 [mm]

▼ : tipo de cemento CEM III/B SR/BC 32.5N  
Granulometrías: 0.03-0.25, 0.25-0.5, 0.5-1.0, 0.03-1.0 [mm]

**Tabla 6.1.** Proporción en peso de la relación agregado/cemento (s/c) y agua/cemento (w/c) de las probetas de pasta de cemento y mortero de microesferas de vidrio y áridos.

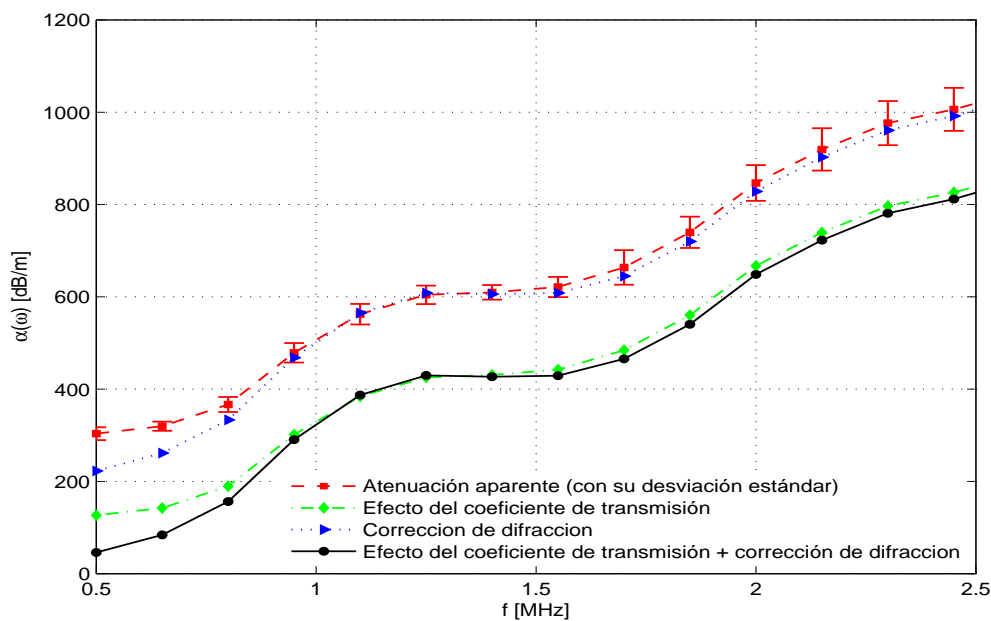
nales  $a_N$  (radio) y sus fracciones volumétricas nominales  $\phi_N$  obtenidas mediante la expresión (6.2.1). Cabe mencionar que sólo se tiene constancia por parte del proveedor del intervalo de radios con respecto a las microesferas de vidrio, mientras que la granulometría de los áridos ha sido obtenida a partir de los tamices utilizados en el proceso de fabricación de las probetas correspondientes.

Muestras	Conjunto 1			Muestras	Conjunto 2		
	$a_N$ [mm]	(w/c): 0.35	(w/c): 0.40		(w/c)	$a_N$ [mm]	$\phi_N$ [%]
		$\phi_N$ [%]					
M025S1	0.09-0.15	13.4	12.6	M300G1W65	0.65	0.03-0.25	54.3
M025S2	0.21-0.30	13.4	12.6	M300G2W52	0.52	0.25-0.50	57.9
M025S3	1.0	13.4	12.6	M300G3W46	0.46	0.50-1.00	59.8
M050S1	0.09-0.15	23.7	22.4				
M050S2	0.21-0.30	23.7	22.4				
M050S3	1.0	23.7	22.4	M100G0W38	0.38	0.03-1.00	35.7
M100S1	0.09-0.21	38.1	36.6	M200G0W45	0.45	0.03-1.00	50.2
M100S2	0.21-0.30	38.1	36.6	M300G0W46	0.46	0.03-1.00	59.8
M100S3	1.0	38.1	36.6				

**Tabla 6.2.** Tamaño y fracción volumétrica de agregados para las muestras de mortero con microesferas de vidrio (Conjunto 1) y para las muestras de mortero con áridos (Conjunto 2).

### 6.2.2. Medidas de la velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia

Mediante el sistema de emisión-recepción desarrollado y descrito en el capítulo anterior, se realizaron diez mediciones del pulso ultrasónico en transmisión e inmersión en la zona central de cada probeta. Se determinaron las curvas de velocidad  $V_L(\omega)$  y atenuación  $\hat{\alpha}(\omega)$  utilizando el método de cruces por cero (véase §5.3.2.2) y la técnica de barrido lineal aplicándose también el procedimiento tiempo-frecuencia desarrollado en §5.4.3.1. Asimismo se efectuaron las correcciones de transmisión debidas a la interfase agua-espécimen-agua y debidas al efecto de difracción utilizando la expresión (5.4.5), consiguiendo la determinación de la atenuación total  $\alpha(\omega)$ . Cabe mencionar que las correcciones por difracción son más necesarias por debajo de 750 KHz ya que a partir de esta frecuencia es mayor la variación del propio material debido a su heterogeneidad, como se aprecia en la Figura 6.1.

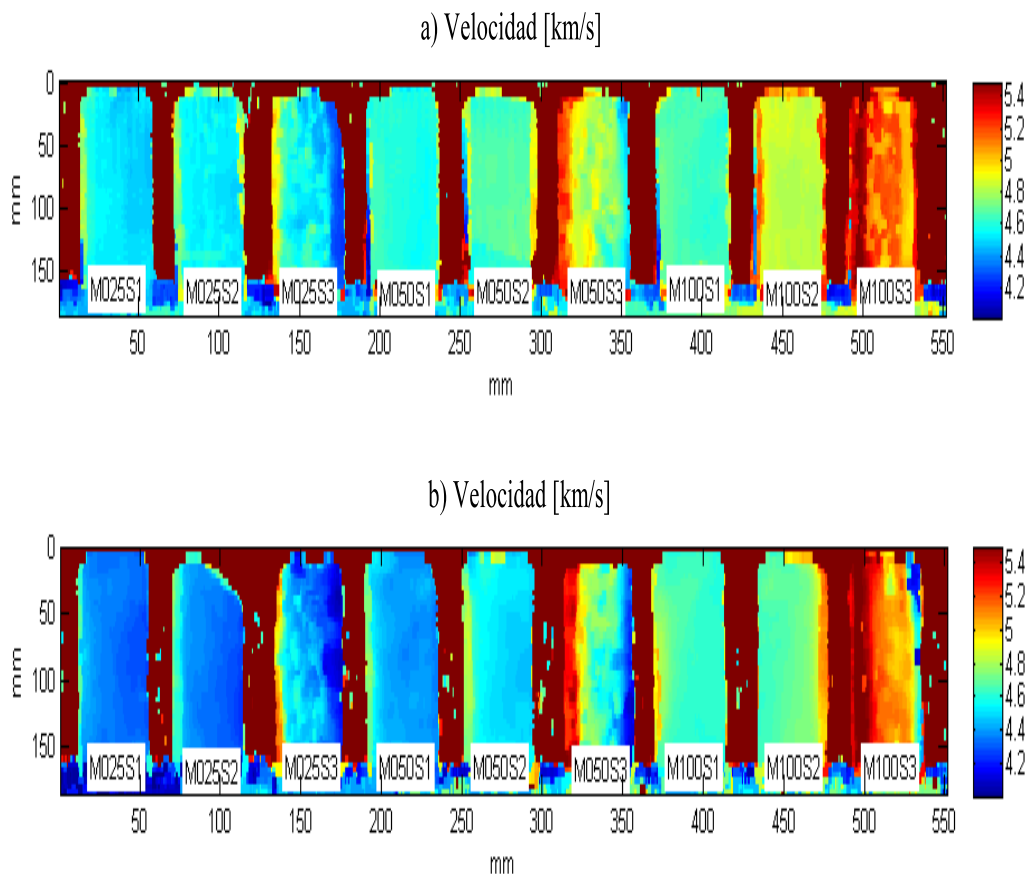


**Figura 6.1.** Influencia del coeficiente de transmisión y corrección de difracción sobre las variaciones de la atenuación aparente promedio (diez medidas). La desviación estándar representada por la barras verticales (color rojo) se refiere a las variaciones en la medida de la probeta de mortero M100S1 con  $(w/c)=0.35$ .

### 6.2.3. Heterogeneidad de la probetas

Para ilustrar la problemática de la heterogeneidad de las muestras de mortero, se ha empleado el sistema de barrido automático de inspección ultrasónica que ya ha sido mostrado en la Figura 5.1. Este sistema es capaz de realizar mediciones en cualquiera de las tres di-

recciones  $(x, y, z)$  controlado desde un ordenador, sincronizando el movimiento del sistema de inspección con la generación y adquisición de los pulsos ultrasónicos. Se han utilizado pulsos de banda ancha con una frecuencia de emisión de 5 MHz (véase §5.3.1). A partir de las señales ultrasónicas recibidas, se han generado dos tipos de representaciones mostradas en imágenes de falso color, *C-scan* y *D-scan*. El valor de cada punto de la imagen de falso color para una representación *C-scan*, se refiere a la amplitud máxima del pulso recibido en dicha coordenada, mientras que en una representación en *D-scan* indica la posición del pulso de máxima amplitud. Conociendo el espesor de las muestras, mediante la imagen en *D-scan* se puede generar una mapa de velocidades<sup>4</sup> como se muestra en la Figura 6.2.

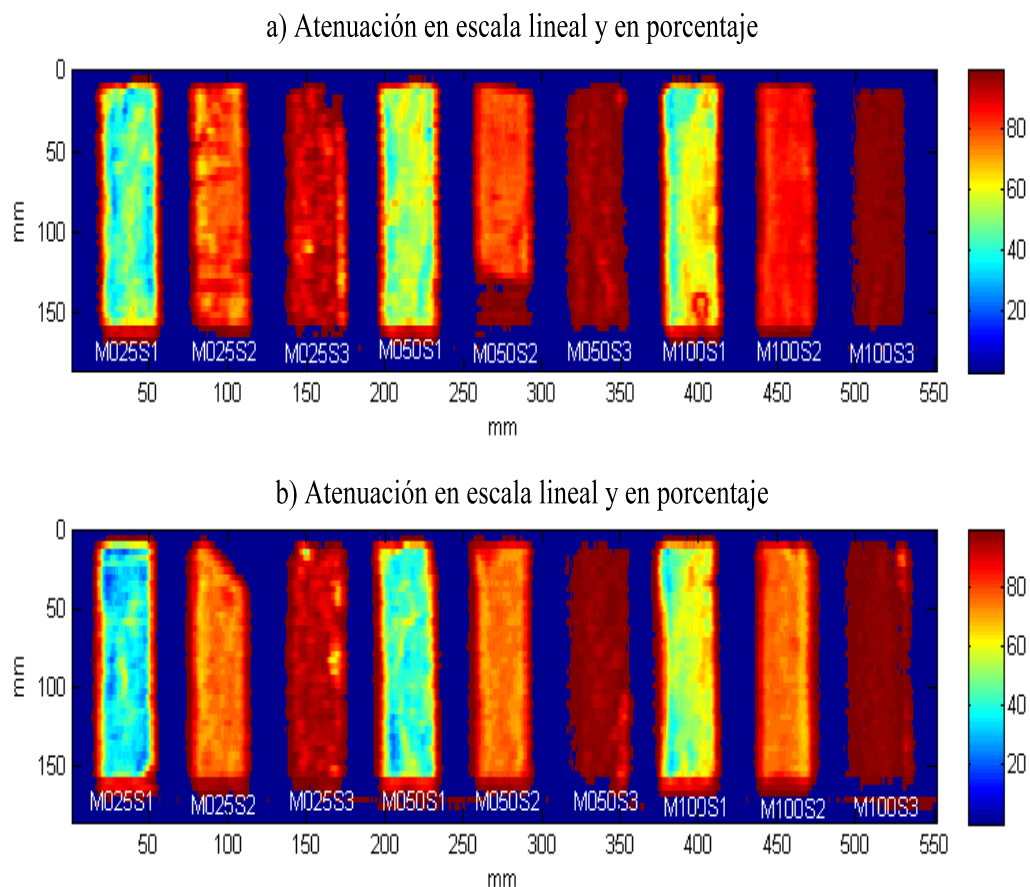


**Figura 6.2.** Mapa de velocidades de las probetas de mortero con microesferas de vidrio: a)  $(w/c)=0.35$ , y b)  $(w/c)=0.40$ .

<sup>4</sup>Cabe señalar que este mapa de velocidades corresponde a las velocidades del frente de ondas del pulso ultrasónico recibido (a la frecuencia de máxima energía propagada en el material), por lo que no coincide sus valores con las velocidades de fase. Los mapas de velocidad mostrados han de ser vistos de forma cualitativa para apreciar las variaciones de la medida con respecto a la heterogeneidad del material.

## 6. CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS MEDIANTE LA VELOCIDAD Y ATENUACIÓN ULTRASÓNICA

Estos mapas de velocidad proporcionan las variaciones espaciales en cada punto de las probetas (2 [mm] de resolución en el eje  $x$  y 4 [mm] en el eje  $y$ ) observándose que presentan diferencias en velocidad aproximadamente de hasta un 2 % en una misma probeta. Con respecto a todo el conjunto de probetas, se aprecian variaciones alrededor de un 10 %. En cuanto a las variaciones que existen entre probetas en términos de la atenuación, se muestra en la Figura 6.3 el mapa en amplitud normalizada lo que proporciona una cuantificación de la atenuación en escala lineal y en porcentaje, obtenidos usando la representación *C-scan*. En estos mapas se observa mejor la heterogeneidad de las probetas, y las variaciones que existen entre probetas con distintas concentraciones y tamaños de inclusiones. Se observa que aumentando el tamaño de las inclusiones la atenuación se incrementa (la escala de color significa mayor atenuación cuando sea más rojo y menor cuando sea más azul).

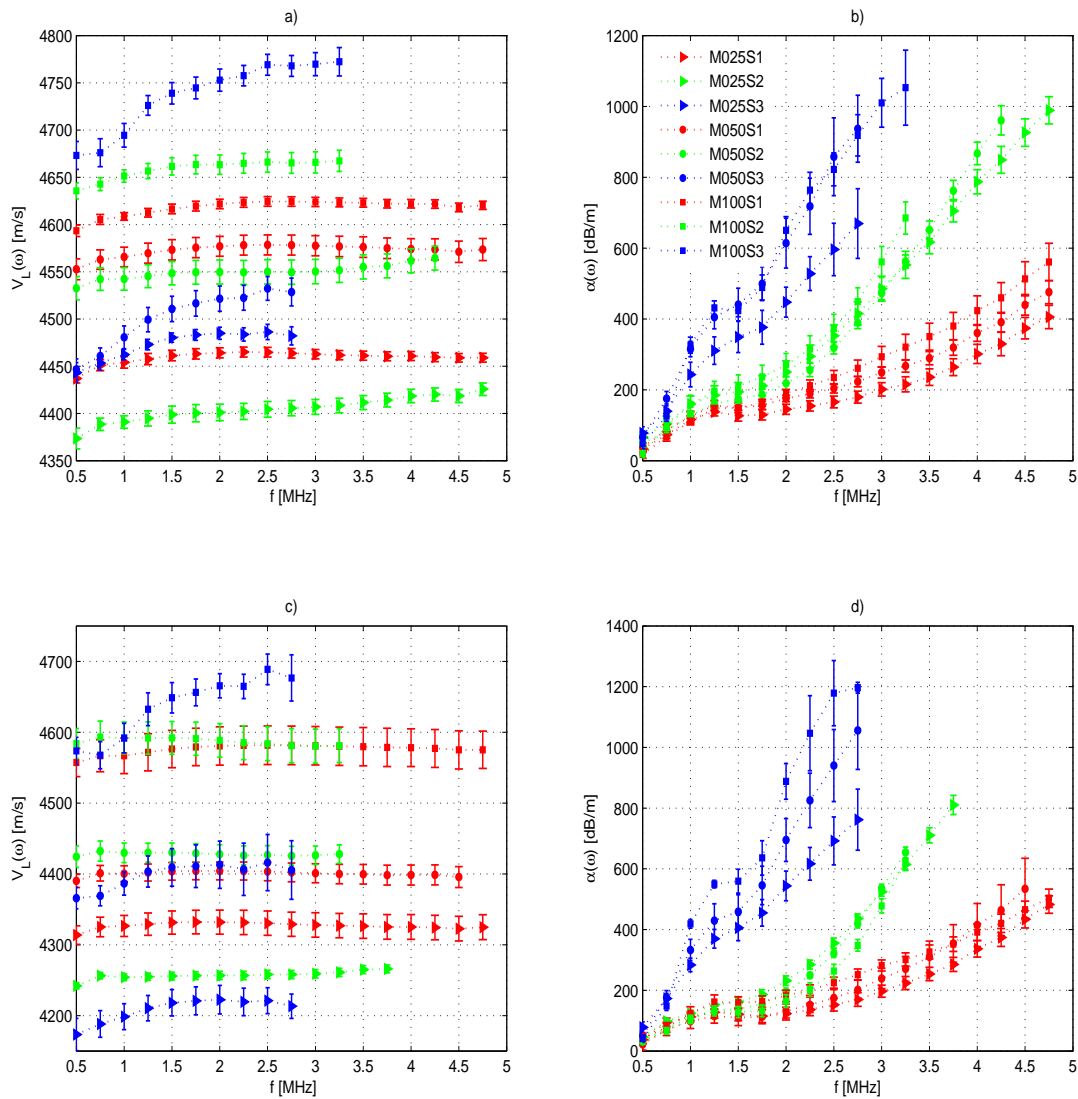


**Figura 6.3.** Mapa de atenuación en escala lineal y en porcentaje de las probetas de mortero con microesferas de vidrio: a)  $(w/c)=0.35$ , y b)  $(w/c)=0.40$ .

Sin embargo, aunque parezca que las probetas correspondientes al tamaño de inclusión de 1 [mm] son homogéneas, en la realidad no lo son y se tendrá que cambiar la escala de color para mostrar su heterogeneidad. A diferencia de la velocidad, se observan variaciones en una misma probeta alrededor del 10 %. Debido a la heterogeneidad en una misma probeta, ha de asumirse que las predicciones que se realicen con el modelo dinámico autoconsistente N-fásico pueden ajustarse en un intervalo de magnitudes esperadas del 2 % para la velocidad y en un 10 % para la atenuación, sin que este hecho indique que se ha realizado una indebida predicción. Los valores numéricos de los mapas difieren de los valores de los perfiles de atenuación y velocidad en función de la frecuencia, ya que las técnicas de medida no son equivalentes, pero proporcionan una buena información sobre la heterogeneidad de las probetas y los rangos de medida.

#### **6.2.4. Discusión sobre las predicciones obtenidas por el modelo dinámico autoconsistente N-fásico**

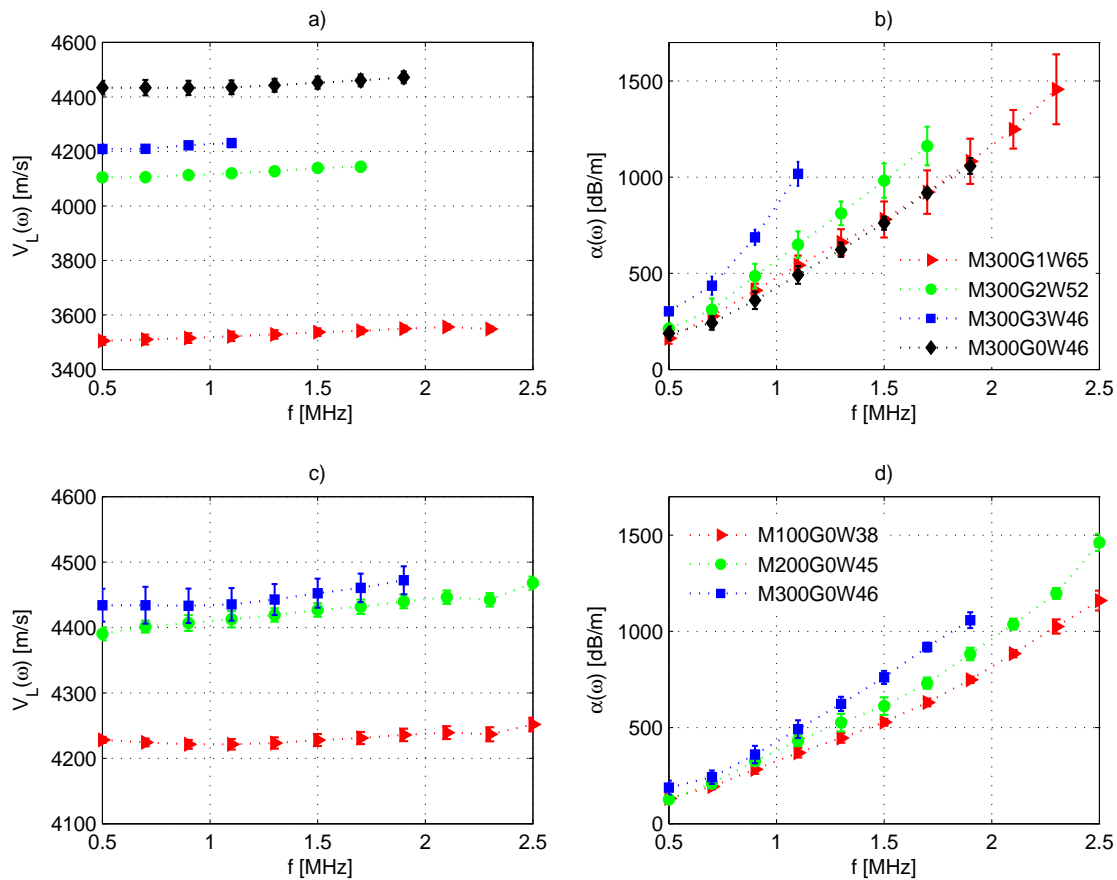
Los perfiles de velocidad y atenuación experimentales promedio de los grupos I y II se muestran en la Figura 6.4. donde se observa que el rango de frecuencias en las que pudieron ser medidas dichas curvas dependen del grado de heterogeneidad de la probeta (relación tamaño-fracción de volumen). No obstante, para todos los casos, la mínima frecuencia en la que se midieron estas curvas, 500 KHz, se debe al espesor de las probetas (40 [mm]) ya que a frecuencias menores, el pulso ultrasónico recibido es distorsionado por interferencias negativas producidas entre el pulso transmitido y el reflejado por la superficie de la probeta. Las curvas de velocidad y atenuación mostradas en la Figura 6.4 ponen de manifiesto las características mencionadas en el estudio teórico. Se aprecia que las curvas de velocidad están agrupadas en función de la fracción volumétrica de los agregados, mientras que las curvas de atenuación lo están por el tamaño. Las diferencias en magnitud de la velocidad o atenuación entre una misma clase de probetas, según el tamaño o la fracción volumétrica de los agregados, son debidas a las variaciones de las matrices cementicias respectivas, así como también a los distintos tamaños y concentraciones del aire ocluido que no pueden ser controlados en el proceso de fabricación. Se puede observar que a mayor concentración de agregados se incrementa la magnitud de la velocidad. En las curvas de atenuación, una mayor proporción de agregados también corresponde en general a una mayor atenuación, sin embargo, debido a la pequeña diferencia entre ellas, la propia heterogeneidad de la probeta hace que las curvas de atenuación estén casi solapadas para alguno de los tamaños de agregados. Estos resultados experimentales concuerdan con las predicciones hechas por el modelo dinámico autoconsistente N-fásico.



**Figura 6.4.** Curvas promedio de velocidad y atenuación experimentales, de las probetas de mortero con microesferas de vidrio para a), b)  $(w/c)=0.35$  y c), d)  $(w/c)=0.40$ .

En la Figura 6.5 se presentan las curvas de velocidad y atenuación experimentales de las probetas de mortero con áridos. Estas probetas se ha dividido en dos grupos a fin de ilustrar dos efectos, el primero con distintos intervalos en la distribución de tamaños de los agregados y fijando constante la concentración de agregados, y el segundo incrementando la fracción volumétrica de los áridos y con una distribución de tamaños constante. Como se mencionó en el apartado de la descripción de las probetas, se fabricaron a distintas relaciones agua/cemento para mantener en lo posible, matrices cementicias similares ya que

debido al “agua de absorción de los agregados”, un incremento en la proporción de agregados o un decremento en su tamaño equivale a disminuir la relación agua/cemento efectiva y por tanto a cambiar considerablemente las propiedades de la matriz. En el primer caso, se observa que a medida que la distribución de tamaños de los agregados se incrementa tanto la velocidad como la atenuación aumentan en magnitud. Por otra parte, en el segundo grupo (véase Figuras 6.5c y 6.5d) el aumento de las concentraciones de los agregados se aprecia en todo el intervalo de frecuencias de las curvas de velocidad, sin embargo, este efecto se va apreciando mejor en las curvas de atenuación cuando se aumenta la frecuencia. En términos generales también se cumplen las predicciones de los resultados teóricos, sin embargo, hay aspectos que se alejan de lo esperado, por ejemplo a la misma concentración de agregados de diferentes tamaños, se esperaría que las velocidades fueran más similares. La explicación a este efecto viene determinada por la gran diferencia entre las porosidades de la matriz de cemento producida.



**Figura 6.5.** Curvas promedio de velocidad y atenuación experimentales de las probetas de mortero con áridos.



### 6.3. Validación experimental del modelo dinámico autoconsistente N-fásico en materiales cementicios

Para poder contrastar los resultados experimentales con la predicción de las curvas de velocidad y atenuación de los materiales cementicios mediante el modelo de dispersión múltiple, MDAC N-fásico, se deben conocer los parámetros microestructurales, tales como: las propiedades de la matriz cementicia, la porosidad del material compuesto, la distribución de tamaños y concentraciones tanto de los agregados como del aire ocluido. No obstante, el conocimiento completo de estos parámetros es en ocasiones muy difícil o imposible, especialmente las propiedades de la matriz cementicia, así como también el tamaño y la concentración del aire ocluido. Por tal motivo, mediante el proceso de análisis-síntesis genérico que se ha planteado en la introducción de este capítulo, se estimarán los parámetros microestructurales que mejor se ajusten a las curvas experimentales de velocidad y atenuación. Para validar el modelo, se analizará la viabilidad de la estimación de los parámetros microestructurales, como se verá en la siguiente sección.

Para llevar a cabo el ajuste de curvas, se ha empleado la función objetivo mostrada en el expresión (6.1.1). Se asume que se conocen tanto el tamaño como la concentración de los agregados ( $a$  y  $\phi$ ) puesto que son parámetros fácilmente controlados en el proceso de fabricación, tanto en las probetas de mortero con microesferas de vidrio como, en las de áridos. En primera instancia, se supone un único tamaño medio de las granulometrias que se mostraron en la Tabla 6.2, y se usan sus respectivas fracciones volumétricas que también han sido mostradas en las mismas tablas. Los parámetros a estimar son  $\bar{x} = [V_{L_1} \ V_{T_1} \ \rho_1 \ a_v \ \phi_v \ m_A \ b_A]$ , donde  $V_{L_1}$ ,  $V_{T_1}$  y  $\rho_1$  son la velocidad longitudinal, la velocidad transversal, y la densidad de la matriz cementicia, respectivamente,  $a_v$  y  $\phi_v$  son el radio y la concentración del aire ocluido (del mismo modo que con los agregados sólo se considera un único tamaño para el aire ocluido),  $m_A$  y  $b_A$  se refieren a la pendiente y ordenada al origen de una recta que modeliza la atenuación por absorción. En primer lugar hay que destacar que las propiedades de la matriz cementicia estimada contienen la contribución de la porosidad capilar pero se desacopla de los efectos del aire ocluido, al considerarlo como otra fase del material. Por otro lado,  $\alpha_{tot}^{th}(\bar{x}, \omega)$  es el perfil de atenuación total (absorción y dispersión), véase expresiones (5.4.11) y (6.1.1), resultado:

$$\alpha_{tot}^{th}(\bar{x}, \omega) = \alpha_{sc}(V_{L_1}, V_{T_1}, \rho_1, a_v, \phi_v, \omega) + (1 - \phi_v - \phi)A_m(m_A, b_A, \omega) \quad (6.3.1)$$

con

$$A_m(m_A, b_A, \omega) = m_A \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) + b_A \quad (6.3.2)$$

donde la frecuencia angular  $\omega$  de la ecuación (6.3.2) viene dada en [MHz], y por tanto las unidades de  $m_A$  y  $b_A$  son [dB/(m MHz)] y [dB/m], respectivamente. La elección de modelar a la atenuación por absorción mediante un comportamiento lineal viene dada por los resultados obtenidos por Punurai et al (2007, 2006).

Para ambos conjuntos de probetas de mortero (microesferas y áridos) se estableció que los límites inferiores y superiores permisibles de los parámetros a estimar en el proceso de análisis, son:  $V_{L_1} = \{2200, 4500\}$  [m/s],  $V_{T_1} = \{1300, 2800\}$  [m/s],  $\rho_1 = \{800, 2600\}$  [kg/m<sup>3</sup>],  $a_v = \{0.01, 3.0\}$  [mm],  $\phi_v = \{0.01, 10\}$  [%],  $m_A = \{0, 1400\}$  [dB/m MHz] y  $b_A = \{-500, 1400\}$  [dB/m].

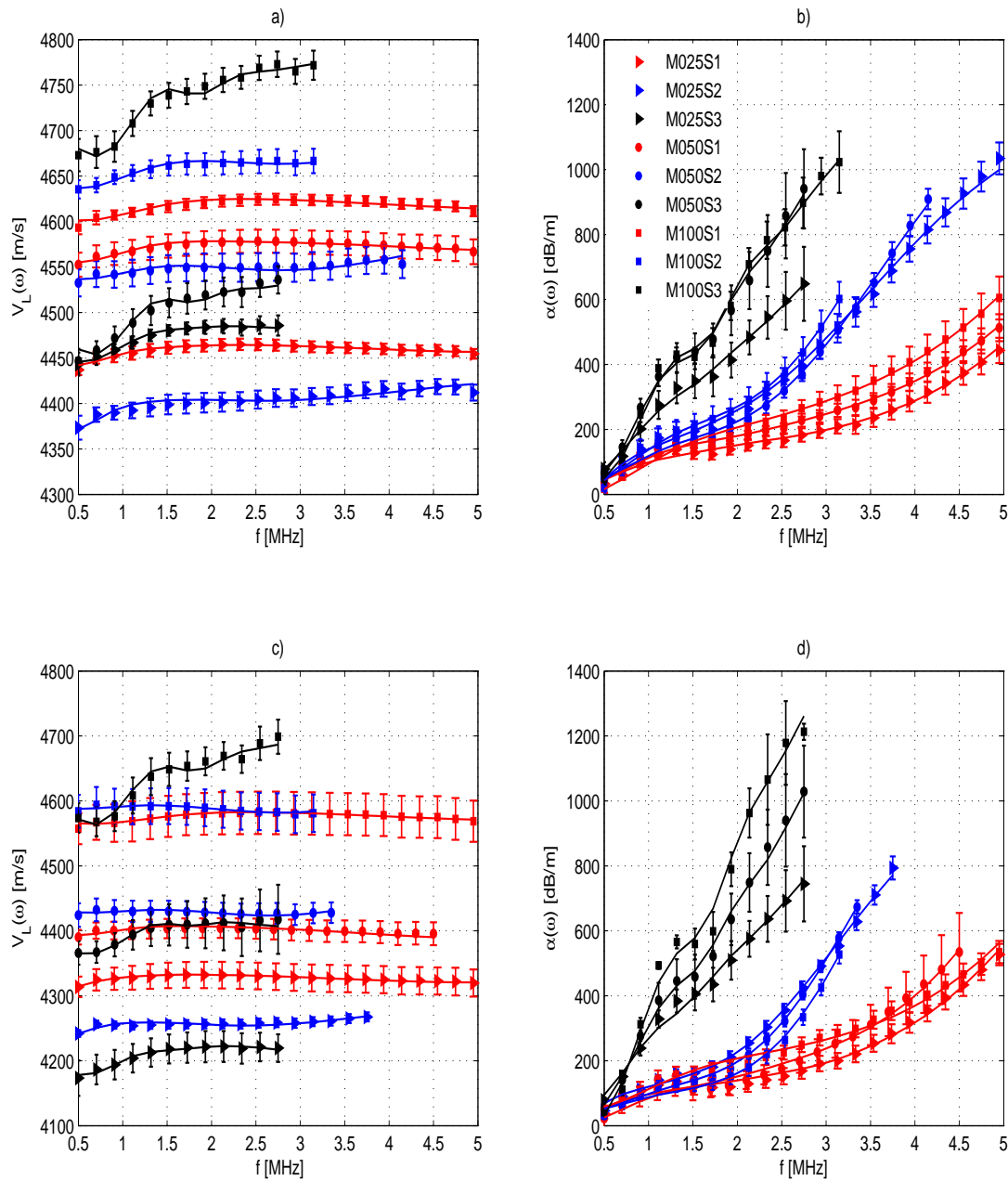
### 6.3.1. Estimación para probetas de mortero con microesferas de vidrio

Como resultado de este procedimiento, en la Figura 6.6 se presentan tanto las curvas experimentales como las obtenidas por el modelo dinámico autoconsistente N-fásico correspondientes a las probetas de mortero con microesferas (grupos I y II). De estos gráficos, se observa claramente que el modelo dinámico autoconsistente N-fásico es capaz de generar perfiles de velocidad y atenuación acorde a tales curvas experimentales, independientemente del tamaño y la fracción volumétrica de los agregados.

Las estimaciones obtenidas para los parámetros microestructurales que definen al vector  $\bar{x}$  en este proceso de análisis, son mostrados en las Tablas 6.3 y 6.4 con respecto a las probetas de mortero de los grupos I y II, respectivamente. Además, se incluye la media  $\bar{m}$ , la desviación estándar  $\bar{\sigma}$  y la variación entre medidas  $\bar{\sigma}/\bar{m}$  de estas estimaciones. De acuerdo con las estimaciones de los parámetros microestructurales correspondientes a las probetas de microesferas de vidrio, se observa que las propiedades  $V_{L_1}, V_{T_1}, \rho_1$  de las matrices cementicias varían en menor cuantía en comparación con las grandes variaciones de los parámetros que determinan la atenuación por absorción,  $A_m(\omega, m_A, b_A)$ . El principal motivo de esta gran variación es que resolver conjuntamente los parámetros de absorción de la matriz y los del aire ocluido crea una indeterminación en la solución. Por ello, es necesario determinar *a priori* los parámetros de la matriz, ya que en principio deberían ser más constantes. En secciones posteriores se describirá un procedimiento propuesto para abordar esta problemática, (véase §6.4.1).

## 6. CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS MEDIANTE LA VELOCIDAD Y ATENUACIÓN ULTRASÓNICA

Como se indicó anteriormente, se ha modelado al mortero como un material trifásico compuesto de una matriz, agregados y aire ocluido, por lo que el efecto de la porosidad capilar está incluida en estas estimaciones sobre la matriz cementicia.



**Figura 6.6.** Curvas promedio de velocidad y atenuación experimentales y teóricas obtenidas con el modelo dinámico autoconsistente N-fásico para a), b)  $(w/c)=0.35$  y c), d)  $(w/c)=0.40$ . Las curvas teóricas están representadas por las líneas continuas.

### 6.3. Validación experimental del modelo dinámico autoconsistente N-fásico en materiales cementicios

Muestras	$V_{L_1}$ [m/s]	$V_{T_1}$ [m/s]	$\rho_1$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$m_A$ [dB/m MHz]	$b_A$ [dB/m]	$a_v$ [mm]	$\phi_v$ [%]
M025S1	4328	2421	2079	36	19	0.81	0.83
M025S2	4264	2385	2177	61	-8	0.99	1.54
M025S3	4333	2464	2174	88	19	0.81	0.73
M050S1	4331	2417	2074	55	24	0.70	0.82
M050S2	4301	2426	2150	49	40	0.66	0.82
M050S3	4276	2745	1916	1	55	0.40	2.83
M100S1	4176	2454	1930	88	-1	0.51	0.87
M100S2	4222	2508	2018	70	21	0.69	1.44
M100S3	4312	2691	1979	60	9	0.42	2.23
$\bar{m} (\bar{\sigma})$	4283(54)	2501(128)	2055(101)	56(27)	20(19)	0.67(0.19)	1.35(0.75)
$\bar{\sigma}/\bar{m}$ [%]	1.26	5.12	4.91	48.21	95	28	56

**Tabla 6.3.** Estimación de los parámetros microestructurales para las probetas de mortero con microesferas de vidrio ( $w/c$ )=0.35, mediante el procesos de análisis-síntesis.

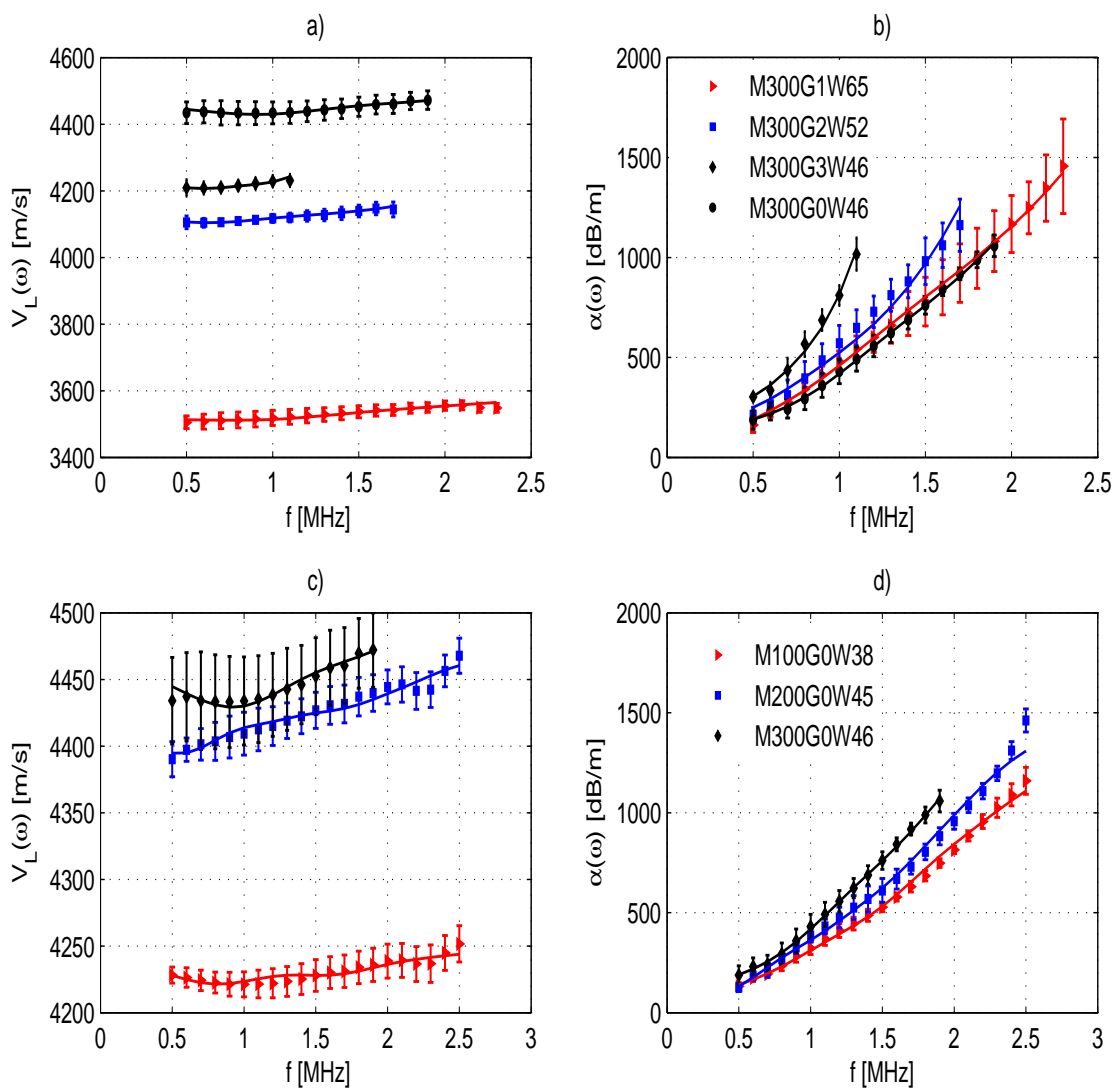
Por tanto, las variaciones de los parámetros  $V_{L_1}$ ,  $V_{T_1}$ ,  $\rho_1$  con respecto a los grupos de probetas I y II no son superiores al 5 % lo que conduce a suponer que poseen propiedades similares con respecto a sus matrices cementicias. Estos resultados concuerdan a su vez con las mínimas variaciones de estas muestras con respecto a sus porosidades ( $p_\phi$ ) obtenidas mediante ensayos no destructivos (Ensayo de porosidad accesible al agua) como se describe y se muestran en el anexo C y las Tablas C.1 y C.2, variaciones no mayores al 4 %.

Muestras	$V_{L_1}$ [m/s]	$V_{T_1}$ [m/s]	$\rho_1$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$m_A$ [dB/m MHz]	$b_A$ [dB/m]	$a_v$ [mm]	$\phi_v$ [%]
M025S1	4198	2360	1986	36	21	1.08	0.80
M025S2	4123	2371	2024	37	28	1.06	1.10
M025S3	4063	2334	2147	23	60	0.75	1.05
M050S1	4167	2296	1916	70	-14	0.73	0.56
M050S2	4187	2416	2033	38	44	0.62	0.54
M050S3	4133	2615	2171	148	-26	0.70	1.60
M100S1	4129	2441	2045	72	46	0.55	0.76
M100S2	4157	2434	2007	34	56	0.76	0.47
M100S3	4259	2709	1892	59	-35	0.37	4.26
$\bar{m} (\bar{\sigma})$	4157(55)	2442(135)	2025(92)	57(38)	20(36)	0.73(0.22)	1.24(1.19)
$\bar{\sigma}/\bar{m}$ [%]	1.32	5.53	4.54	65.52	180	30.13	95.97

**Tabla 6.4.** Estimación de los parámetros microestructurales para las probetas de mortero con microesferas de vidrio ( $w/c$ )=0.40, mediante el procesos de análisis-síntesis.

### 6.3.2. Estimación para probetas de mortero con áridos

Se ha mostrado la validación experimental del modelo con respecto a la generación de curvas de velocidad y atenuación en concentraciones menores de un 40 %. En cuanto al caso de las probetas de mortero con áridos cuyas fracciones varían entre un 35 % a un 60 %, se muestran en la Figura 6.7 y en la Tabla 6.5, las curvas de velocidad y atenuación, así como también las estimaciones de los parámetros microestructurales obtenidas por el proceso de análisis-síntesis, respectivamente.



**Figura 6.7.** Curvas promedio de velocidad y atenuación experimentales y teóricas obtenidas por el modelo dinámico autoconsistente N-fásico para las probetas de mortero con áridos. Las curvas teóricas están representadas por las líneas continuas.

Nuevamente, se comprueba la eficacia del modelo dinámico autoconsistente N-fásico que es capaz de ajustarse a los perfiles de velocidad y atenuación correspondientes a materiales cementicios con alta concentración de agregados. Aunque sólo se han mostrado materiales cementicios cuyos tamaños de agregados varían desde 0.03 [mm] hasta 1.0 [mm], el modelo puede ser utilizado para agregados de menor o mayor tamaño.

En cuanto a las estimaciones mostradas en la Tabla 6.5, se aprecia que las propiedades de las matrices cementicias varían en gran medida, inclusive con la premisa de que se ha variado sus relaciones agua/cemento en función de los requerimientos del tamaño y concentración de los agregados para mantener dichas propiedades lo más cercanas posibles. Sin embargo, estas variaciones son consecuencia de la cantidad de agua consumida en la mezcla, y principalmente debidas a que el aumento de la relación de agua/cemento lleva consigo un incremento de la porosidad capilar, además del inevitable efecto del aire ocluido. Asimismo, se puede apreciar de las estimaciones de las probetas M300G1W65, M300G2W52 y M300G3W46, que a medida que se aumenta la relación (w/c), disminuye la velocidad lo que también conduce a un incremento de la porosidad, observación que se puede contrastar a partir de las mediciones de porosidad ( $p_\phi$ ) mostradas para este caso en la Tabla C.3.

Muestras	$V_{L_1}$ [m/s]	$V_{T_1}$ [m/s]	$\rho_1$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$m_A$ [dB/m MHz]	$b_A$ [dB/m]	$a_v$ [mm]	$\phi_v$ [%]
M300G1W65	2970	1922	1111	870	-16	0.28	2.84
M300G2W52	3222	2417	1363	487	330	0.57	2.90
M300G3W46	3303	2460	1504	619	320	1.77	0.25
M100G0W38	3765	2388	2060	21	-35	1.04	1.93
M200G0W45	3634	2432	2114	134	-3	1.17	3.10
M300G0W46	3494	1898	1954	250	29	1.42	1.78

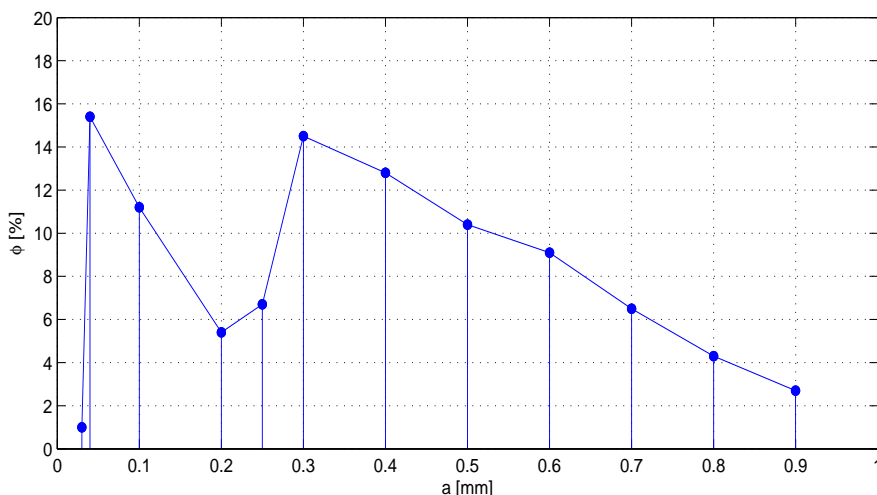
**Tabla 6.5.** Estimación de los parámetros microestructurales para las probetas de mortero con áridos, mediante el procesos de análisis-síntesis.

Por otra parte, se observa que en la mayoría de estas probetas de mortero con áridos, sus parámetros estimados con respecto a la atenuación por absorción ( $m_A$  y  $b_A$ ) son mayores que los obtenidos en las probetas de mortero con microesferas de vidrio, véanse Tablas

6.3 y 6.4. Este hecho pudiera ser atribuido a la zona interfacial de transición<sup>5</sup>, ya que al ser una interfase imperfecta entre la matriz cementicia y los agregados propicia un aumento en las pérdidas de energía por absorción del pulso ultrasónico que se propaga por el material (Philippidis y Aggelis, 2005). La caracterización ultrasónica de esta zona, así como la contribución que ésta aporta sobre la atenuación sigue siendo un tema abierto de investigación.

### 6.3.3. Influencia de la distribución del tamaño de los agregados

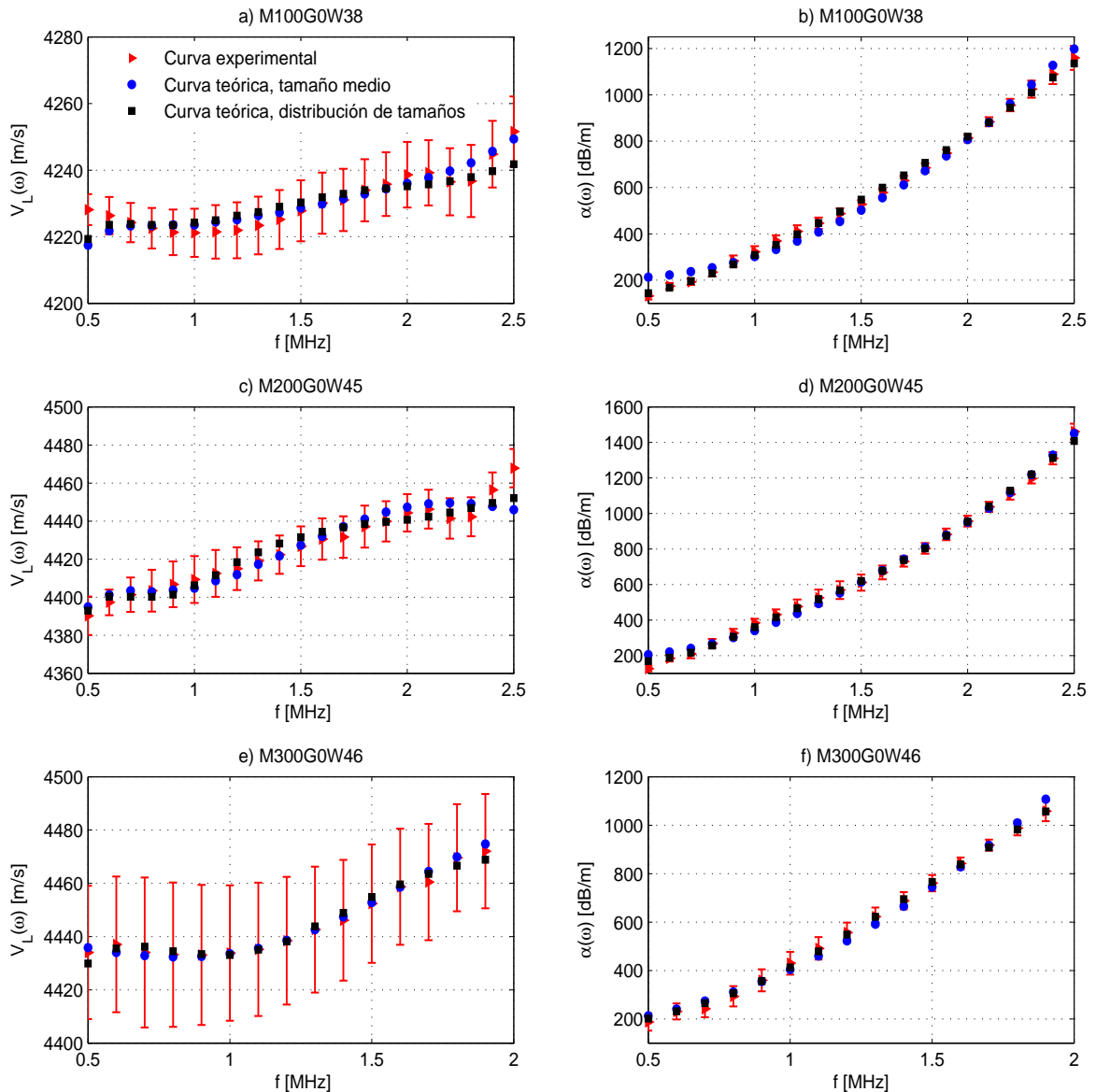
En el estudio teórico se ha mostrado que distintos tipos de distribuciones de inclusiones sobre un rango razonable de tamaños, prácticamente no influyen sobre los perfiles de velocidad y atenuación. En este apartado se presenta la comprobación experimental de estos resultados teóricos utilizando las probetas de mortero con granos de arena, M100G0W38, M200G0W45 y M300G0W46. Aplicando el mismo procedimiento de análisis-síntesis, se estiman los parámetros microestructurales de la matriz cementicia, atenuación por absorción y aire ocluido, teniendo en cuenta dos casos: un único tamaño de agregado y la distribución de agregados obtenida de acuerdo al tamizado realizado en el proceso de fabricación de las probetas, como se muestra en la Figura 6.8.



**Figura 6.8.** Distribución relativa del tamaño de agregados de las muestras de mortero con áridos.

<sup>5</sup>Esta zona se forma entre la matriz cementicia (propiamente la pasta de cemento hidratada) y los agregados, típicamente con un espesor desde 10 a 50 [ $\mu\text{m}$ ] con una microestructura y propiedades diferentes a la pasta de cemento hidratada. Por tanto, podría ser considerada como otra fase más de la microestructura de los materiales cementicios (Mehta y Monteiro, 2006).

El resultado de esta comprobación se muestra en la Figura 6.9, donde se observa claramente una mínima diferencia entre emplear un tamaño medio y una distribución de agregados. En esta figura además se observa que las variaciones producidas entre la elección de modelar la distribución de los agregados no es mayor que la propia variación del material, independientemente del aumento en la concentración de agregados.

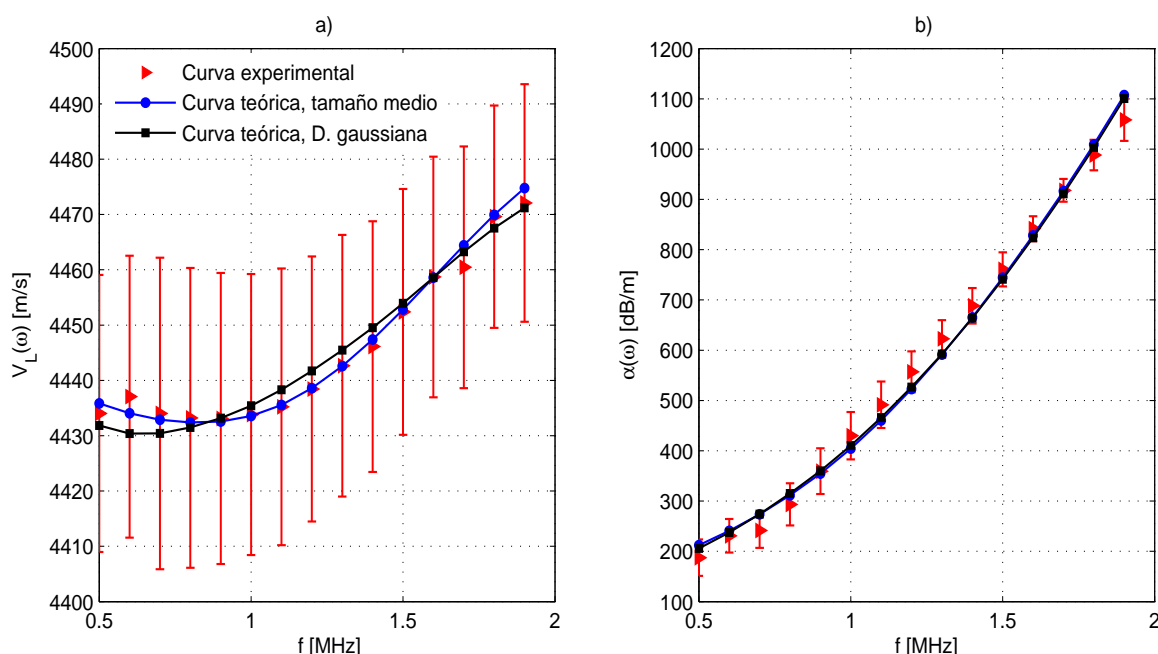


**Figura 6.9.** Influencia de una distribución del tamaño de agregados sobre perfiles de velocidad y atenuación experimentales y teóricos.



#### 6.3.4. Influencia de la distribución del tamaño del aire ocluido

En cuanto a las variaciones provocadas por suponer un tamaño tamaño medio o una distribución de tamaños del aire ocluido en un mortero de cemento, se observa en la Figura 6.10, que la diferencia prácticamente es nula tanto en el perfil de velocidad como en el de atenuación sobre este rango de frecuencias. La concentración de agregados para este caso,  $\phi=59.8\%$  es mucho mayor en comparación con la fracción volumétrica estimada del aire ocluido,  $\phi = 0.8\%$ , lo que disminuye en gran medida la contribución de este último sobre el efecto global de la dispersión.



**Figura 6.10.** Influencia de la distribución del aire ocluido sobre perfiles de velocidad y atenuación experimental y teóricos. Se ha empleado la muestra de mortero M300GOW46.

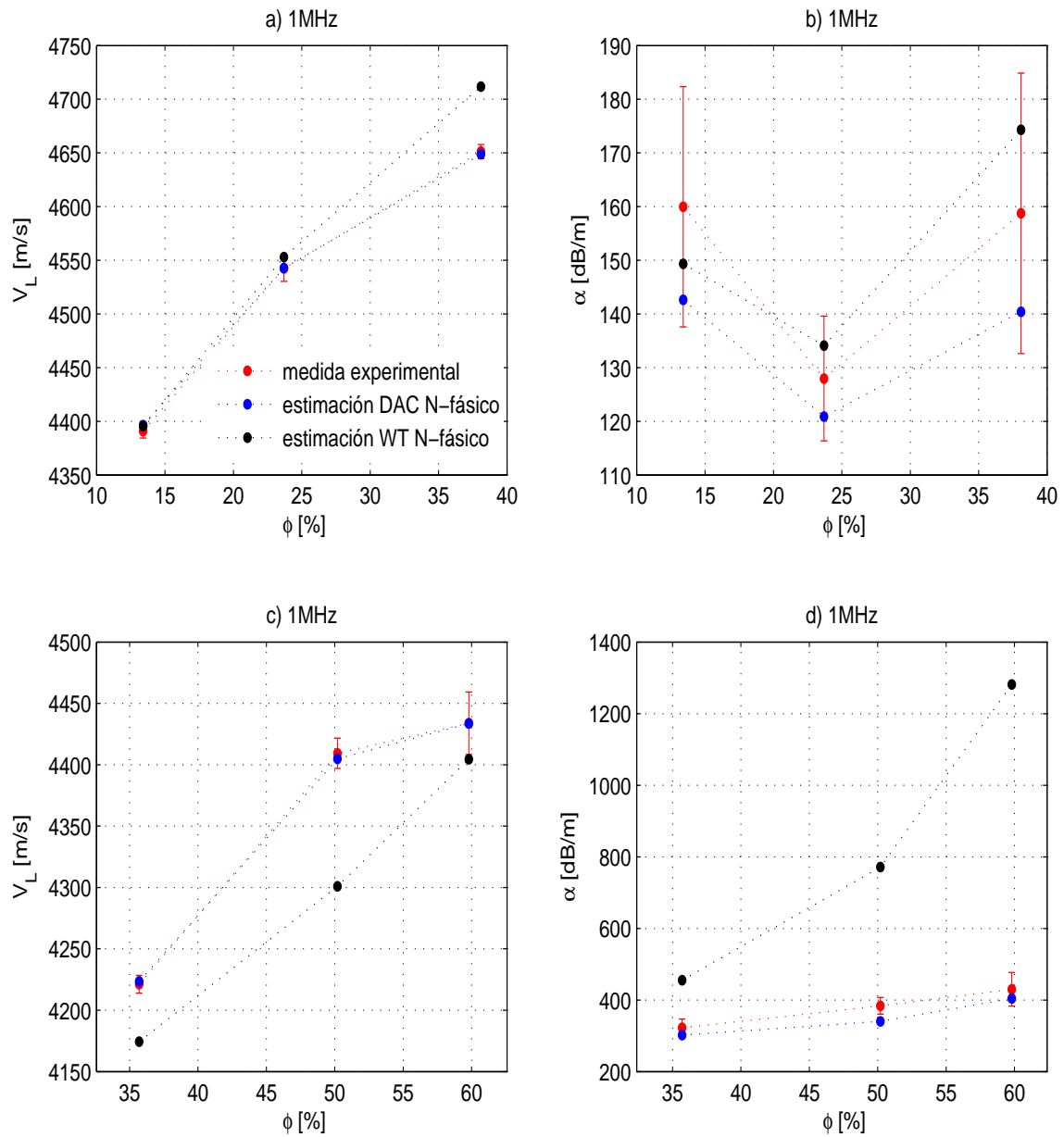
Sin embargo, en las pastas de cemento donde el aire ocluido o atrapado es el único agente responsable del efecto de la dispersión (en el rango de frecuencias establecido en este estudio), no debe suponerse un único tamaño medio de las cavidades, si lo que interesa es tener una precisa estimación de las propiedades de la matriz cementicia de dicho compuesto. Esta hipótesis da pie al establecimiento del procedimiento presentado más adelante en §6.4.1.

### 6.3.5. Rango de aplicación del modelo dinámico autoconsistente N-fásico

Como conclusión, el modelo genera perfiles de velocidad y atenuación para altas concentraciones de agregados, comprobado experimentalmente hasta un 60 %, superando las limitaciones de baja concentración del modelo de Waterman-Truell. Este resultado es importante puesto que en la caracterización de materiales cementicios es común encontrar concentraciones superiores al 40 %, y por tanto, puede ser utilizado para materiales más complejos como es el caso del hormigón. Cabe señalar que los últimos estudios que se encuentran en el estado del arte (Aggelis et al, 2005; Chaix et al, 2006) han empleado el modelo de Waterman-Truell para la caracterización de mortero y hormigón con un límite de hasta un 40 % de agregados.

Para comprobar la observación mostrada en la Figura 4.5 que presenta los gráficos de la velocidad y la atenuación con respecto a la concentración de agregados, se ha generado, de forma similar, los gráficos que se muestran en la Figura 6.11. En primer lugar, se observa que a concentraciones por debajo del 40 %, tanto el modelo WT N-fásico como el DAC N-fásico, (véanse Figuras 6.11a y 6.11b) aportan resultados que prácticamente coinciden con las medidas experimentales, con variaciones que no sobrepasan el 1 % con respecto a la velocidad y un 10 % con la atenuación, resaltando que en §6.2.3 se ha mencionado que la variación del propio material puede propiciar variaciones de estas magnitudes del 2 % y 10 %, respectivamente. A medida que se aumenta la concentración de agregados, véanse Figuras 6.11c y 6.11d, el modelo dinámico autoconsistente N-fásico proporciona mejores resultados tanto para la velocidad como para la atenuación (en este caso menores que la tolerancia anteriormente establecida), mientras que el modelo WT sólo es capaz de predecir los valores de velocidad con una variación aproximadamente menor que el 3 %, coincidiendo con las observaciones realizadas por Layman et al (2006) pero para el caso de materiales compuestos por resinas epoxy y microesferas de vidrio.

Estos resultados son con referencia al rango de frecuencias empleado, ya que cuando se disminuya el rango de frecuencias de la aplicación, el modelo WT puede mejorar sus prestaciones como ha sido aplicado últimamente por Shiotani et al (2009), pero únicamente utilizando sus predicciones con respecto a la velocidad. No obstante, se pone de manifiesto que el modelo dinámico autoconsistente N-fásico brinda mejores resultados que el modelo WT N-fásico a costa de aumentar la complejidad de la modelización y el tiempo de cálculo.



**Figura 6.11.** Comparativa de los gráficos de velocidad y atenuación con respecto a la concentración de agregados obtenidos experimentalmente y mediante los modelos de WT N-fásico y DAC N-fásico. Las medidas de velocidad y atenuación corresponden a la frecuencia de 1MHz. En a) y b) se presentan las variaciones de velocidad y atenuación con respecto a las probetas M025S2, M050S2 y M050S2 del grupo I, mientras que en c) y d) las medidas experimentales y teóricas corresponden a las probetas de mortero con áridos, M100G038, M200G0W45 y M300G0W46.

#### **6.4. Estimación de parámetros microestructurales de materiales cementicios mediante el modelo dinámico autoconsistente N-fásico**

Una vez que se ha comprobado experimentalmente la eficacia y rango de aplicación del modelo dinámico autoconsistente, se establecen en esta sección una serie de procedimientos para la estimación de los parámetros microestructurales más significativos de los materiales cementicios. El planteamiento general de estos procedimientos es el siguiente: con el conocimiento de ciertos parámetros se podrían estimar otros de difícil medición, y por tanto, contar con técnicas que permitan la evaluación sistemática de los parámetros más significativos que determinan el comportamiento global del material. Sin embargo, la estimación de los parámetros microestructurales de este tipo de materiales compuestos es de elevada complejidad, incluso utilizando técnicas destructivas de laboratorio es difícil determinar parámetros como la relación (w/c) y (s/c) empleadas en la fabricación de un determinado material cementicio. Asimismo, se ha podido comprobar la gran importancia que tiene la matriz cementicia y el aire ocluido en la dispersión ultrasónica, parámetros que difícilmente se conocerán *a priori* ya que vienen afectados, principalmente, por la variación de la relación (w/c) utilizada, la (w/c) efectiva debido a la absorción de agua por los agregados, el método de vibrado y el empleo de aditivos. Por consiguiente, la caracterización de la microestructura de los materiales cementicios mediante la metodología desarrollada va a depender en gran medida de la casuística que se encuentre. En algunos casos, cuando se conozcan y permanezcan constantes el suficiente número de variables microestructurales se podrá medir con gran precisión las restantes, en otros, cuando este conocimiento no sea exhaustivo sólo se podrán marcar los límites o rangos en los que se encuentran las variables microestructurales que se desconozcan. Se contrastarán los resultados obtenidos por esta metodología con medidas destructivas de los mismos parámetros, observándose la mayor parte de las veces, que dada la heterogeneidad del material y la precisión de las medidas destructivas es difícil establecer una medida cuantitativa de la precisión del método ultrasónico en la caracterización microestructural.

Se expone a continuación diferentes ejemplos de caracterización, empezando por un procedimiento que permite la estimación tanto de las propiedades de la matriz cementicia como de los parámetros que caracterizan a la atenuación por absorción a partir de medidas sobre las pastas de cemento patrón y el modelo dinámico autoconsistente N-fásico.

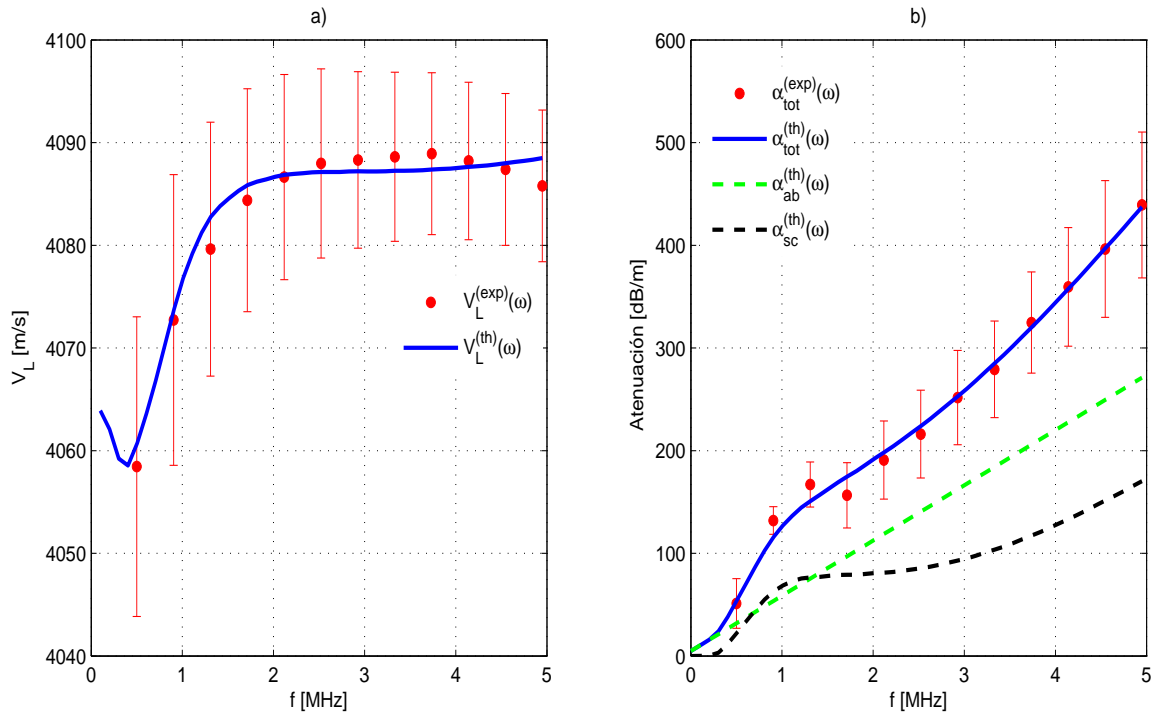
#### 6.4.1. Estimación de las propiedades de la matriz cementicia

Si se tiene un conjunto de probetas donde se supone que la matriz cementicia es semejante y el objetivo es caracterizar los agregados, se necesita conocer las constantes de esta matriz, velocidad, densidad y atenuación por absorción. Una forma de caracterizar estas propiedades es empleando probetas de pastas de cemento como muestras patrón o de referencia. Las pastas de cemento, como se ha indicado, poseen una microestructura porosa que las hace no homogéneas, siendo a la vez inevitable la aparición de aire ocluido en el proceso de fabricación. Por ello, la velocidad y atenuación medidas en las pastas de cemento incluyen tanto el efecto del aire ocluido como el de la porosidad. Además, en el caso de la atenuación, los mecanismos de absorción y dispersión están incluido en la medida. Por tal motivo, se va exponer un método para la estimación de las propiedades de la matriz. Este método desacopla el efecto del aire ocluido para determinar la atenuación por absorción y las propiedades de una matriz cementicia ausente de cavidades pero incluyendo la contribución de la porosidad capilar en las constantes elásticas estimadas a partir de las curvas de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia medidas en las pasta de cemento de referencia. El procedimiento consiste en resolver un proceso de optimización de acuerdo a la función objetivo mostrada en la expresión (6.1.1), para determinar nuevamente los parámetros definidos en  $\bar{x}$ , pero en este caso sobre perfiles de velocidad y atenuación medidos en las pastas de cemento. Se consideran dos tamaños y concentraciones de aire ocluido ( $a_{v_j}$  y  $\phi_{v_j}$  con  $j=1,2$ ), debido a que con un único tamaño se pierde precisión en el ajuste de curvas, asimismo, la atenuación total queda definida como:

$$\alpha_{tot}^{(th)}(\bar{x}, \omega) = \alpha_{sc}(V_{Lp}, V_{Tp}, \rho_p, a_{v_j}, \phi_{v_j}, \omega) + \left[ 1 - \sum_j \phi_{v_j} \right] \left[ m_{Ap} \left( \frac{\omega}{2\pi} \right) + b_{Ap} \right] \quad (6.4.1)$$

donde  $V_{Lp}$ ,  $V_{Tp}$  y  $\rho_p$  son la velocidad longitudinal y transversal, así como la densidad de las pastas de cemento, respectivamente,  $m_{Ap}$  y  $b_{Ap}$  son la pendiente y la ordenada al origen de la componente de absorción estimadas sobre las pastas.

El efecto producido por el aire ocluido en las pastas de cemento se aprecia fácilmente comparando tanto la curva de velocidad y atenuación medida en la pasta con los perfiles obtenidos mediante este procedimiento propuesto, como se muestra, por ejemplo, en la Figura 6.12 con respecto a la pasta de cemento con (w/c)=0.40. Se observa en la Figura 6.12a cómo influyen las cavidades sobre el perfil de velocidad, ya que sería constante si no las hubiera. No obstante, el efecto es mayor en el caso de las curvas de atenuación (véase Figura 6.12b).



**Figura 6.12.** Curvas de velocidad experimental,  $(w/c):0.40$ , y teórica considerando a la pasta de cemento como un material bifásico compuesto de una matriz cementicia y aire ocluido.

Como se observa de este último gráfico, la curva que se determina experimentalmente es la suma de los dos mecanismos de atenuación (absorción y dispersión). Considerando la atenuación medida como la atenuación por absorción pueden cometerse estimaciones erróneas, y cada vez mayores a medida que se aumenta la frecuencia. Por ello, es necesario desacoplar el efecto del aire ocluido en las medidas de las propiedades de las pastas de cemento a fin de usarlas como valores de referencia. En la Tabla 6.6 se muestran las estimaciones de los parámetros microestructurales para ambas pastas de cemento,  $(w/c):0.35$  y  $0.40$ , observándose que las propiedades de la matriz obtenidas con este procedimiento son muy cercanas a los valores medios obtenidos por el proceso de análisis-síntesis que fueron mostrados en las Tablas 6.3 y 6.4. Por ejemplo, para las estimaciones de las probetas con  $(w/c)=0.35$ , las variaciones entre estos dos métodos de acuerdo a la velocidad longitudinal y transversal, así como la densidad son menores de un 0.5 %, 1 %, 7 %, respectivamente, también para el parámetro de la pendiente  $m_A$  sus diferencias son menores del 4 %, sin embargo, se observa que hay una diferencia de 11[db/m] entre los dos métodos con respecto al parámetro que describe la ordenada del origen de recta de la atenuación por absorción pero de cualquier forma se encuentran dentro de la misma variación consecuentes de las medidas. Por tanto, mediante la medición de la velocidad y atenuación de pastas de cemento patrón y la aplicación del

## 6. CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS MEDIANTE LA VELOCIDAD Y ATENUACIÓN ULTRASÓNICA

presente procedimiento propuesto se pueden estimar de forma fácil, las propiedades de una matriz cementicia con respecto a un tipo de cemento y una relación agua/cemento. Además, un resultado importante es la obtención de la proporción entre las velocidades longitudinal y transversal, ( $r_V = V_{Tp}/V_{Lp}$ ), reduciendo así un parámetro a estimar, en este caso de 0.58 para las probetas de mortero con (w/c)=0.35 y 0.56 para las probetas con (w/c)=0.40.

Pasta (w/c)	$V_{Lp}$ [m/s]	$V_{Tp}$ [m/s]	$\rho_p$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$m_{Ap}$ [dB/(m MHz)]	$b_{Ap}$ [dB/m]	$a_{vj}$ [mm]	$\phi_{vj}$ [%]
0.35	4267	2476	1914	58	9	[0.05 1.01]	[1.17 0.90]
0.40	4101	2284	1825	54	5	[0.09 0.91]	[0.42 1.08]

**Tabla 6.6.** Estimación de parámetros de la matriz cementicia con respecto las pastas de cemento, (w/c)=0.35 y 0.40.

De estas estimaciones, también se determinan la pendiente y ordenada al origen que definen la recta que modela a la componente de la atenuación por absorción para matrices correspondientes a una relación (w/c) determinada. Aunque se han desacoplado los efectos del aire ocluido en estas medidas, permanece el efecto de la porosidad observándose que de las medidas de porosidad de las pastas (Tabla C.1) no varían más de un 1 % con respecto a las porosidades de las matrices correspondientes a las probetas de mortero. Como un resultado importante se observa que las densidades obtenidas por este procedimiento prácticamente son las mismas que las medidas por ensayos destructivos, ED; para la pastas de cemento (w/c):0.35 se estimó una densidad de 1914 [kg/m<sup>3</sup>] y se midió por ED 1909 [kg/m<sup>3</sup>], mientras para la pasta con (w/c):0.40 resulto en la estimación 1825 [kg/m<sup>3</sup>] y por el ED 1821 [kg/m<sup>3</sup>]. Por tanto, puede asumirse que la atenuación por absorción estimada por este procedimiento es una buena aproximación para ser usada en la caracterización de las probetas con diferente concentración y granulometría de agregados, siempre y cuando sean del mismo tipo de cemento y (w/c).

### 6.4.2. Estimación de propiedades del mortero: matriz cementicia y aire ocluido

La estimación de las propiedades de las matrices cementicias y del aire ocluido de probetas de mortero puede llevarse a cabo siguiendo el procedimiento descrito en §6.3 donde se asumía que sólo se conocían el tamaño y concentración de los agregados, que se indicará como procedimiento I. Sin embargo, una vez caracterizadas las propiedades de la matriz cementicia de referencia, se pueden suponer conocidas la proporción  $r_V$  y la componente



de la atenuación por absorción lo que disminuye los parámetros a estimar, dando lugar a establecer otro procedimiento de caracterización a partir de la información extraída de pastas de cemento, referido como procedimiento II. Ambos procedimientos se compararán con los resultados obtenidos empleando métodos destructivos, ensayo de porosidad accesible al agua (véase anexo C) y con el procesamiento digital de imágenes de muestras cortadas, véase más adelante el apartado 6.4.2.1.

En el caso de suponer constantes los parámetros de absorción de la matriz  $m_{Ap}$  y  $b_{Ap}$  y la relación entre la  $V_{Tp}$  y  $V_{Lp}$ , también se supondrán conocidos la proporción y el tamaño de los agregados. Por tanto, las variables a determinar en este nuevo procedimiento (procedimiento II) son las correspondientes al siguiente vector  $\bar{x} = \{V_{L1}, \rho_1, a_v, \phi_v\}$  donde  $V_{L1}$  y  $\rho_1$  son la velocidad longitudinal y la densidad de la matriz cementicia,  $a_v$  y  $\phi_v$  son el tamaño y la concentración de aire ocluido. La velocidad transversal se asume que varía según la proporción  $V_{T1} = r_V V_{L1}$ . Los resultados se obtienen empleando la misma función objetivo de la expresión en (6.1.1), y son presentados en la Tabla 6.7.

Muestras	$V_{L1}$ (†) [m/s]	$V_{T1}$ (†) [m/s]	$\rho_1$ (†) [kg/m <sup>3</sup> ]	$a_v$ (†) [mm]	$\phi_v$ (†) [%]
M025S1	4326 (4328)	2510 (2421)	2036 (2079)	0.81 (0.81)	0.41 (0.83)
M025S2	4268 (4264)	2476 (2385)	1965 (2177)	0.90 (0.99)	0.77 (1.54)
M025S3	4346 (4333)	2522 (2464)	2002 (2174)	0.49 (0.81)	1.07 (0.73)
M050S1	4327 (4331)	2511 (2417)	2029 (2074)	0.88 (0.70)	1.07 (0.82)
M050S2	4300 (4301)	2495 (2426)	2103 (2150)	0.71 (0.66)	0.94 (0.82)
M050S3	4249 (4226)	2465 (2745)	1943 (1916)	0.35 (0.40)	1.26 (2.83)
M100S1	4153 (4176)	2410 (2454)	1954 (1930)	1.34 (0.51)	1.99 (0.87)
M100S2	4230 (4222)	2454 (2508)	2004 (2018)	0.70 (0.69)	1.52 (1.44)
M100S3	4303 (4312)	2497 (2691)	1951 (1979)	0.31 (0.42)	1.35 (2.23)

† Estimaciones obtenidas por el procedimiento I.

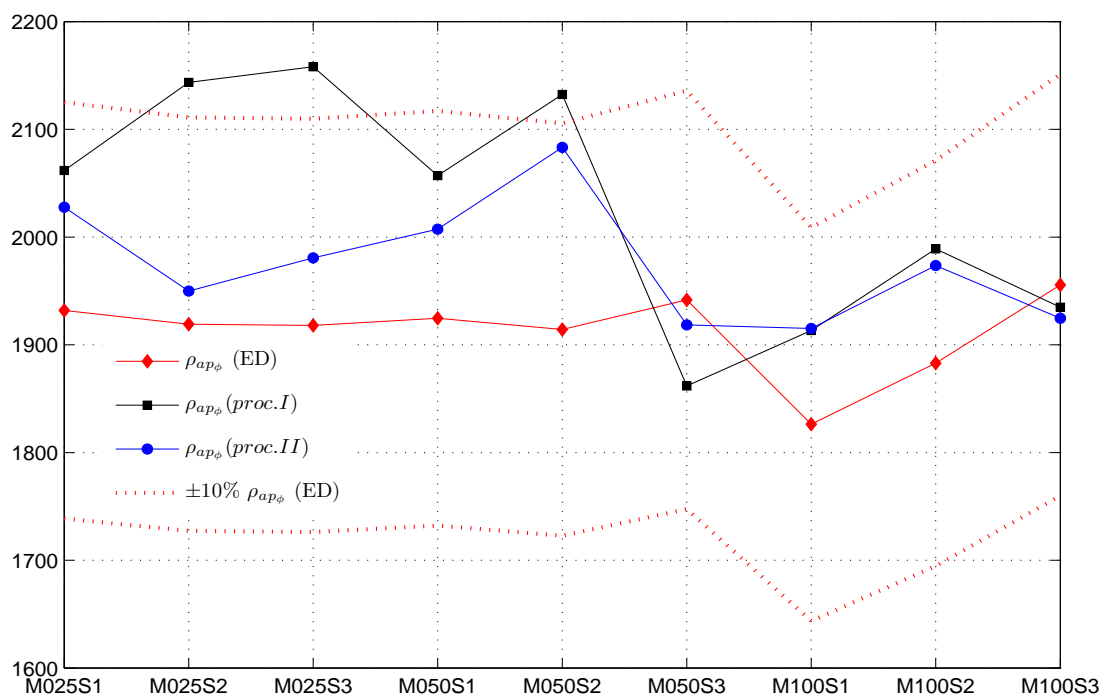
**Tabla 6.7.** Estimación del aire ocluido para las probetas de mortero con microesferas de vidrio ( $w/c$ )=0.35.

Si se comparan estos resultados con los de la Tabla 6.3 que aparecen entre paréntesis (procedimiento I) en la Tabla 6.7, donde no se estableció ninguna restricción a las constantes de la matriz se pueden comprobar algunas semejanzas pero también diferencias significativas. Se observa de estos resultados que la velocidad longitudinal en ambos procedimientos es prácticamente la misma, mientras que se acentúan las diferencias con respecto la velocidad



transversal, la densidad y en el tamaño y concentración del aire ocluido. Estas variaciones sobre todo son debidas a fijar constante la proporción  $r_V$  y la componente de la atenuación por absorción. Sin embargo, se aprecia que las propiedades de la matrices cementicias estimadas por ambos procedimientos se encuentran todavía en los intervalos de tolerancia estipulados en el apartado sobre la heterogeneidad de las probetas. Estos resultados reflejan la complejidad a la hora de estimar con precisión los parámetros microestructurales de los materiales cementicios ya que además es difícil contar con otros medios de medida, incluso métodos destructivos, que permita corroborar los resultados alcanzados.

Para contrastar los resultados obtenidos con los dos procedimientos descritos, se va a comparar la densidad aparente de la matriz cementicia, con medidas de esta densidad realizada a partir de métodos gravimétricos, véase anexo C, y parámetros de fabricación, como se muestra en la Figura 6.13.

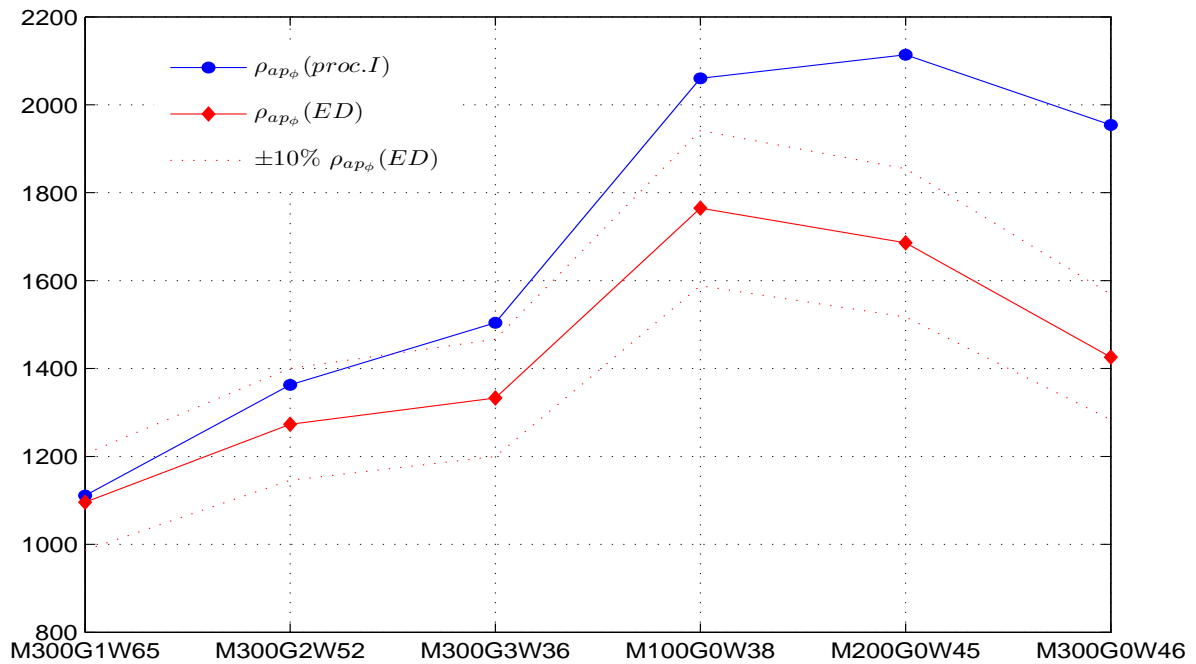


**Figura 6.13.** Comparativa de la estimación de la densidad aparente entre los procedimientos propuestos y medidas de ensayos destructivos para las probetas de mortero con microesferas de vidrio ( $w/c$ ):0.35.

En primer lugar, obsérvese que la densidad aparente (sin considerar los agregados) es aquella que incluye la contribución de la matriz cementicia con su porosidad capilar y aire ocluido, por lo que puede ser obtenida desde los procedimientos propuestos como:

$$\rho_{ap\phi} = (1 - \phi_v)\rho_1 + \phi_v\rho_{aire} \quad (6.4.2)$$

donde  $\phi_v$  es la concentración de aire ocluido estimada en cada procedimiento. La forma de calcular la densidad aparente de las matrices cementicias a partir de ensayos destructivos se describe en el anexo C. Se observa en la Figura 6.13 que los valores de densidad obtenidos mediante el procedimiento II, que toma como partida las propiedades de la matriz cementicia de las pastas de cemento, se encuentran dentro de los márgenes de tolerancia que se asumen en los ensayos destructivos (10%), no obstante, la mayoría de los estimaciones obtenidas por el procedimiento I, pueden asumirse como buenas estimaciones debido a no disponer de pastas de cemento de referencia.



**Figura 6.14.** Comparativa de la estimación de la densidad aparente entre el procedimiento I y medidas de ensayos destructivos para las probetas de mortero con áridos.

En cuanto a probetas de mortero con áridos, las matrices obtenidas son muy diferentes entre si y no se dispone de pasta de cemento de referencia, por tanto, sólo se van a comparar los valores de densidad obtenidos por el procedimiento I. Se puede comprobar en la Figura 6.14 que los resultados son parecidos al caso anterior, pero la diferencia entre las estimaciones y las medidas destructivas son mayores al 10 % pero menores que el 20 %, No obstante, ya que las matrices cementicias son muy diferentes entre sí, los resultados alcanzados indican que el método proporciona resultados aceptables aunque se tenga poca información de la matriz. Este resultado es muy importante de cara a la aplicación práctica del método de evaluación, ya que conocer el estado de la matriz conduce a conocer el estado y deterioro de los materiales cementicios.

#### 6.4.2.1. Comprobación experimental de la estimación del aire ocluido

Con el fin de contrastar las estimaciones tanto del tamaño como de la concentración del aire ocluido utilizando el método dinámico autoconsistente N-fásico, se han determinado tales parámetros mediante el análisis de las imágenes de muestras cortadas de las probetas de mortero (obleas de 4[mm] de espesor). Según los principios del análisis estereológico (Weibel y Elias, 1967), la fracción volumétrica de una inclusión o cavidad,  $\phi_j$ , puede ser medida a partir de una imagen aplicando el criterio expresado como:

$$\phi_{v_j} \cong A_{\phi_j} \quad (6.4.3)$$

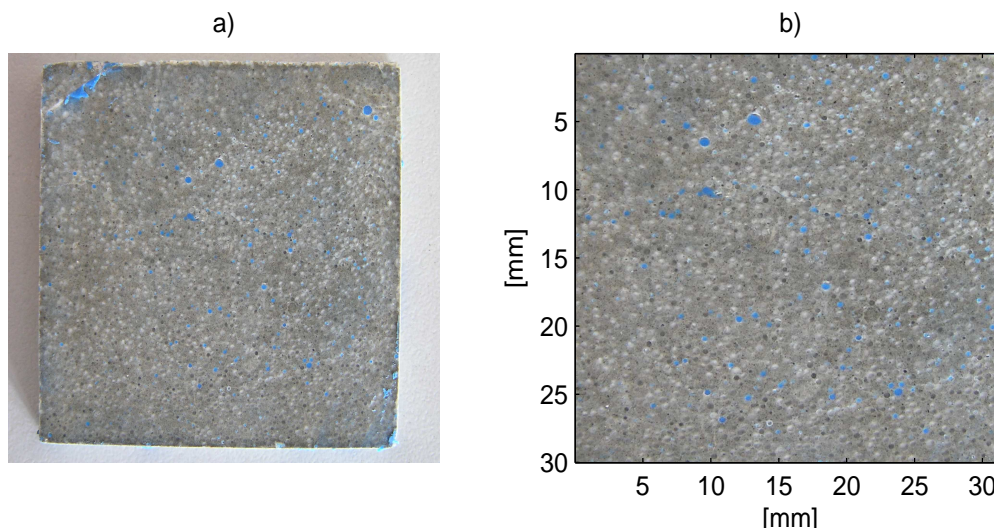
donde  $A_{\phi_j}$  es la fracción en área del tipo de inclusión. En cuanto al tamaño, al determinar la fracción en área, o bien el área de las inclusiones es fácil obtener tanto el radio de cada una de ellas,  $a_j$ , o el radio medio ponderado, como sigue:

$$\hat{a}_w = \frac{\sum_j A_{\phi_j} a_j}{\sum_j A_{\phi_j}} \quad (6.4.4)$$

Para determinar tanto  $\hat{a}_w$  como  $A_{\phi_j}$ , se ha llevado a cabo el siguiente procedimiento:

- *Preparación y captura de imágenes de las muestras.* En esta etapa se cortaron cuatro muestras por cada probeta de mortero, con un espesor de 4 [mm]. Para identificar mejor el aire ocluido se rellenaron los huecos correspondientes con pastas de color, y se procedió a capturar sus respectivas imágenes utilizando una cámara digital, como las

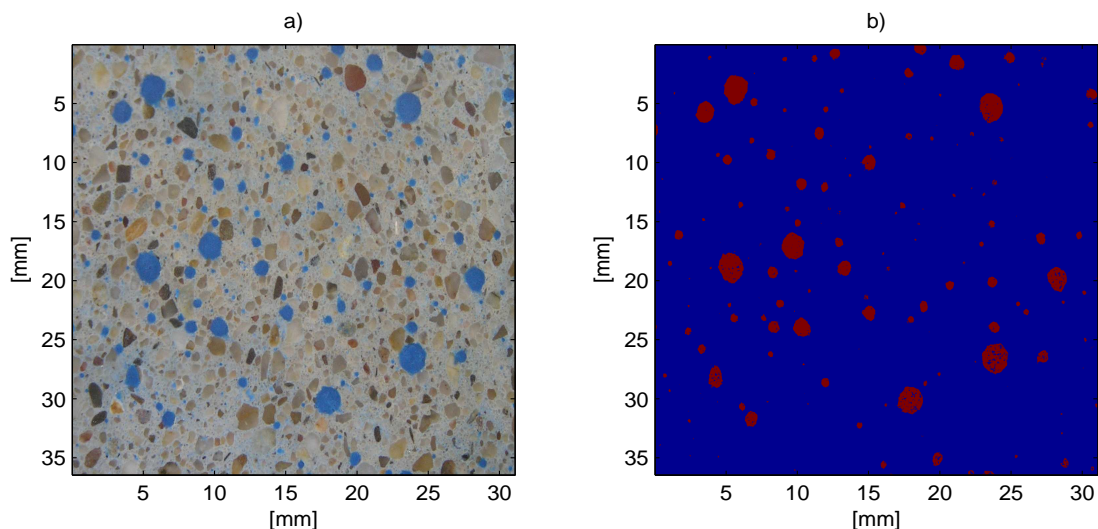
imágenes que se muestran en la Figura 6.15a; se ha elegido la zona más amplia posible evitando los bordes, véase 6.15b.



**Figura 6.15.** Imágenes de un corte de una probeta de mortero con microesferas de vidrio, M050S1: a) Imagen completa capturada y b) Región seleccionada para aplicar el análisis de imagen.

- *Umbralización de la imagen.* Como se utilizan imágenes en formato RGB, se umbralizan en cada una de sus componentes de acuerdo al intervalo en que está definida la pasta coloreada, resultando una imagen segmentada con respecto al aire ocluido, como se muestra en la Figura 6.16.
- *Determinación del tamaño y proporción del aire ocluido.* Utilizando funciones incluidas en la biblioteca de procesamiento de imágenes de *Matlab* pueden determinarse los radios y las áreas de regiones etiquetadas, en este caso de las distintas regiones que representan al aire ocluido, y por consiguiente calcularse el radio medio ponderado  $\bar{a}_w$  y la fracción volumétrica  $\bar{\phi}_{v_j}$  ( $\bar{A}_{\phi_j}$ ) de las muestras cortadas de las probetas haciendo uso de (6.4.4) y (6.4.3), respectivamente.

En la Tabla 6.8 se presentan las medidas obtenidas por este procedimiento de análisis de imágenes para las probetas de mortero con microesferas de vidrio con (w/c)=0.35. Se deben hacer una serie de observaciones sobre la precisión de este método de medida del aire ocluido, que por otra parte es el único disponible en material endurecido. En primer lugar, esta técnica sólo proporciona una estimación de las medidas ya que el muestreo va a ser siem-



**Figura 6.16.** Segmentación de las imágenes: a) Imagen RGB de un corte de probeta M300GOW46, b) imagen segmentada.

Muestras	Grupo I w/c: 0.35			
	$\bar{a}_w$ ( $\bar{\sigma}_a$ )	$\bar{\phi}_w$ ( $\bar{\sigma}_\phi$ )	$\bar{a}_{max}$ ( $\bar{\sigma}_{a_{max}}$ )	$a_{min}$
	[mm]	[ %]	[mm]	[ %] †
M025S1	0.23(0.10)	0.51(0.12)	0.46(0.16)	0.02
M025S2	0.16(0.04)	0.50(0.16)	0.31(0.08)	0.02
M025S3	0.51(0.16)	0.75(0.46)	0.73(0.18)	0.02
M050S1	0.20(0.06)	1.10(0.22)	0.42(0.07)	0.02
M050S2	0.22(0.02)	1.66(0.46)	0.50(0.09)	0.02
M050S3 ‡	0.20	1.98	0.42	0.02
M100S1	0.20(0.05)	1.49(0.79)	0.54(0.14)	0.02
M100S2	0.34(0.04)	2.12(0.57)	0.77(0.07)	0.01
M100S3 ††	—	—	—	—

†: Radio mínimo que pudo ser medido.

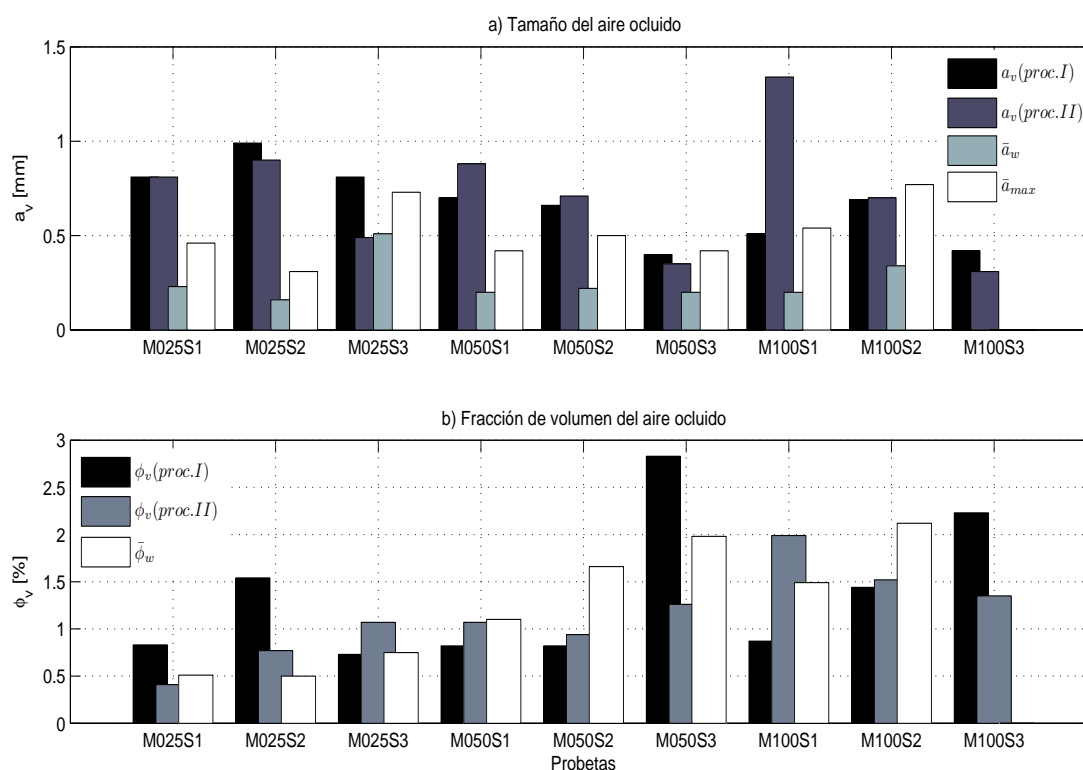
‡: Únicamente, se pudo determinar estas medidas en una muestra de las cuatro cortadas.

††: No se pudo determinar las medidas por la incertidumbre de no distinguir un hueco de aire ocluido con respecto a una microesfera de vidrio.

**Tabla 6.8.** Medición y estimación del aire ocluido en cortes correspondientes a las probetas de mortero con microesferas de vidrio (w/c)=0.35.

pre menor que el necesario, debido a la heterogeneidad del material. Aún suponiendo que el procedimiento y el procesamiento de imagen sea óptimo (captura de imagen, iluminación, umbrales variables para la generación de las imágenes segmentadas, etc.) existen dos fuentes de error inevitables y con efectos contrapuestos; la primera es la pérdida de la medida de aire ocluido al no poder rellenarse adecuadamente mediante la pasta coloreada y la segunda es

la dificultad de distinguir el aire ocluido de los huecos dejados por los “arranques” de agregados en el proceso de corte o manipulación. Este problema ha llevado a desechar una gran parte de las medidas de las probetas con agregados de 1 [mm], especialmente las muestras de la probeta M100S3, ya que existían numerosos “arranques” y eran indistinguibles de las cavidades. Por otra parte, se presentan en dicha tabla tanto el radio medio ponderado, la fracción volumétrica media, así como también el radio máximo medio y mínimo medible en las muestras. Obsérvese que las desviaciones entre las medidas de los diferentes cortes de una misma probeta pueden alcanzar hasta un 30 % y un 50 % con respecto a los tamaños y a las concentraciones, respectivamente.



**Figura 6.17.** Comparativa entre procedimientos de estimación del aire ocluido para las probetas de mortero con microesferas de vidrio con  $(w/c)=0.35$ . a) Estimaciones del tamaño del aire ocluido y b) Fracción de volumen del aire ocluido.

En la Figura 6.17 se presenta una comparativa entre las estimaciones del tamaño y la concentración del aire ocluido obtenidas por el procedimiento I (véase §6.3) y por el procedimiento II (§6.4.2) con respecto las medidas obtenidas en el procedimiento de análisis de imágenes sobre las probetas de mortero con microesferas de vidrio.

Con respecto al tamaño medio, se puede comprobar que en general tienden a dar valores del mismo orden pero los métodos ultrasónicos tienden a aumentar el tamaño medio del aire ocluido con respecto al aire ocluido detectado en las imágenes. En cuanto a la fracción de volumen, la coincidencia entre los resultados de los tres métodos es mayor, ya que en la mayoría de los casos, las diferencias observadas son menores que la desviación en la medida realizada por el procedimiento de análisis de imágenes.

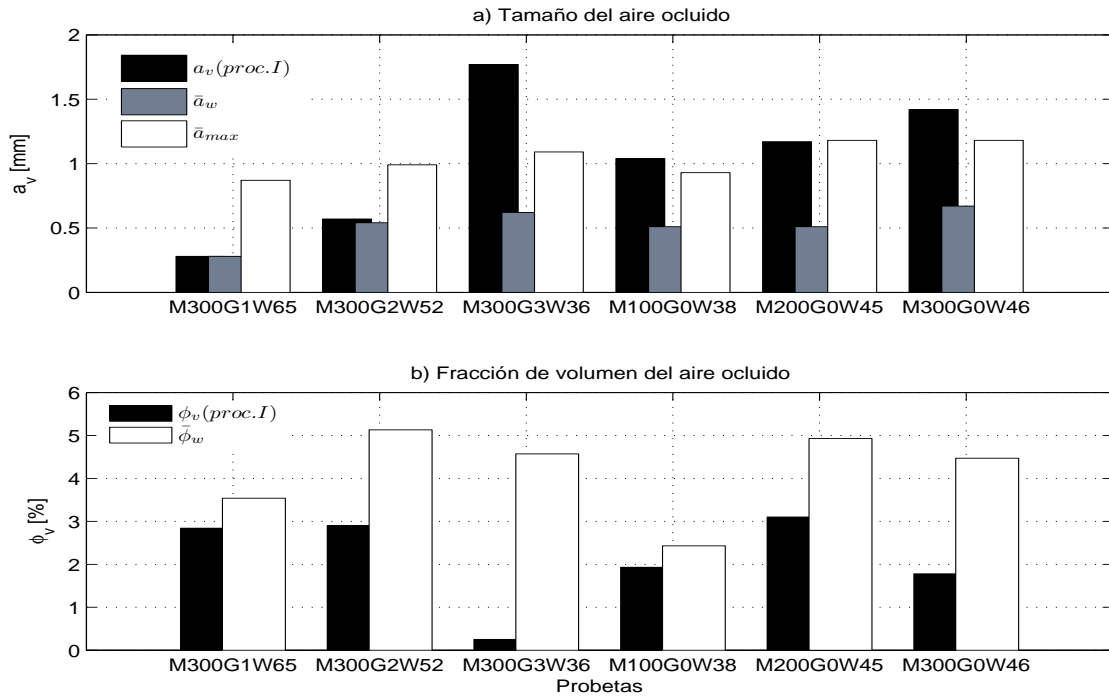
En cuanto a la estimación del aire ocluido en las probetas de mortero, se presentan sus correspondientes mediciones de acuerdo al análisis de imágenes en la Tabla 6.9 y una comparativa entre el procedimiento I y estas medidas destructivas como se aprecia en la Figura 6.18. En estas gráficas se observa que los tamaños se encuentran dentro del intervalo de la propia desviación en la medida del procedimiento de análisis de imágenes, en este caso, con mayor coincidencia con respecto al tamaño medio ponderado, asimismo la fracción de volumen del aire ocluido estimada y medida también se encuentran, en la mayoría de los casos, dentro de la desviación de la medida.

Muestras	$\bar{a}_w (\bar{\sigma}_a)$ [mm]	$\bar{\phi}_w (\bar{\sigma}_\phi)$ [%]	$\bar{a}_{max} (\bar{\sigma}_{a_{max}})$ [mm]	$a_{min}$ [%]
M300G1W65	0.28(0.11)	3.54(0.64)	0.87(0.08)	0.03
M300G2W52	0.54(0.07)	5.13(0.89)	0.99(0.11)	0.02
M300G3W46	0.62(0.05)	4.57(0.63)	1.09(0.07)	0.02
M100G0W38	0.51(0.20)	2.43(0.75)	0.93(0.08)	0.02
M200G0W45	0.51(0.28)	4.93(0.02)	1.18(0.51)	0.02
M300G0W46	0.67(0.05)	4.47(0.84)	1.18(0.18)	0.02

**Tabla 6.9.** Medición y estimación del aire ocluido en cortes correspondientes a las probetas de mortero con áridos.

Estas pruebas ejemplifican muy bien la dificultad de contar con un método preciso para la estimación del aire ocluido, sin embargo, los procedimientos propuestos y descritos en este trabajo proporcionan otra forma para estimar estos parámetros dentro de los intervalos de confianza establecidos por técnicas muy utilizadas como es el caso del análisis de imágenes pero con la gran ventaja de no destruir o preparar la muestra a estudiar.





**Figura 6.18.** Comparativa entre procedimientos para la estimación del aire ocluido para las probetas de mortero con áridos. a) Estimaciones del tamaño del aire ocluido y b) Fracción de volumen del aire ocluido.

### 6.4.3. Estimación del tamaño y concentración de agregados

En secciones anteriores, se ha asumido el conocimiento *a priori* tanto del tamaño como de la fracción volumétrica de los agregados, pero en el caso de que se quieran estimar estos parámetros, se puede utilizar la metodología anteriormente planteada para este fin. Se exponen a continuación dos casos de estudio, el primero asumiendo que las propiedades de las matrices cementicias son constantes e iguales a las obtenidas por pastas de cemento de referencia, y un segundo caso donde se conocen las diferentes propiedades de las matrices cementicias pero asumiendo que la atenuación por absorción en todas las muestras es la misma. Para ejemplificar esos procedimientos se emplean las probetas del grupo I, en el primer caso usa los valores mostrados en la Tabla 6.6 con respecto a  $(w/c)=0.35$ , mientras que en el caso dos se emplean los valores de las propiedades de las matrices iguales con los mostrados en la Tabla 6.7 siendo la atenuación por absorción igual en los dos casos. La función objetivo sigue siendo la misma que la expresada en (6.1.1) con  $\bar{x} = \{a, \phi, a_v, \phi_v\}$  donde  $a$ ,  $\phi$ ,  $a_v$  y  $\phi_v$  son el radio y la concentración de los agregados y del aire ocluido, respectivamente. Los límites inferiores y superiores permisibles de los parámetros a estimar son  $a = \{50, 2500\}$  [mm],  $\phi = \{5, 50\}$  [%],  $a_v = \{0.01, 3.0\}$  [mm],  $\phi_v = \{0.01, 10\}$  [%]. Los resultados de las



## 6. CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES CEMENTICIOS MEDIANTE LA VELOCIDAD Y ATENUACIÓN ULTRASÓNICA

estimaciones obtenidos en ambos casos de estudio se presentan en las Tablas 6.10 y 6.11, respectivamente.

Muestras	$a_N$ [mm]	Grupo I w/c: 0.35				
		$\phi_N$ [%]	$a$ [mm]	$\phi$ [%]	$a_v$ [mm]	$\phi_v$ [%]
M025S1	0.09-0.15	13.4	0.10	19.08	0.52	0.65
M025S2	0.21-0.30	13.4	0.24	14.26	0.01	0.36
M025S3	1.0	13.4	0.90	19.47	0.18	0.55
M050S1	0.09-0.15	23.7	0.11	29.15	0.74	1.08
M050S2	0.21-0.30	23.7	0.19	28.50	0.40	1.08
M050S3	1.0	23.7	0.95	22.94	0.33	1.41
M100S1	0.09-0.21	38.1	0.13	33.50	0.46	1.01
M100S2	0.21-0.30	38.1	0.24	37.25	0.67	1.53
M100S3	1.0	38.1	0.97	40.08	0.29	1.12

**Tabla 6.10.** Estimación del tamaño y fracción de volumen de los agregados y del aire ocluido con respecto al primer caso de estudio.

Muestras	$a_N$ [mm]	Grupo I w/c: 0.35				
		$\phi_N$ [%]	$a$ [mm]	$\phi$ [%]	$a_v$ [mm]	$\phi_v$ [%]
M025S1	0.09-0.15	13.4	0.11	13.31	0.93	0.63
M025S2	0.21-0.30	13.4	0.18	14.62	0.56	1.45
M025S3	1.0	13.4	1.22	13.15	0.60	1.08
M050S1	0.09-0.15	23.7	0.12	23.86	0.75	0.99
M050S2	0.21-0.30	23.7	0.24	23.81	0.66	1.03
M050S3	1.0	23.7	0.95	23.83	0.34	1.28
M100S1	0.09-0.21	38.1	0.12	38.21	1.62	2.17
M100S2	0.21-0.30	38.1	0.25	38.29	0.69	1.52
M100S3	1.0	38.1	0.97	38.30	0.31	1.34

**Tabla 6.11.** Estimación del tamaño y fracción de volumen de los agregados y del aire ocluido con respecto al segundo caso de estudio.

Se aprecian en estas tablas que una mejor estimación de las propiedades de las matrices cementicias conducirá a una mejor estimación del tamaño y concentración de los agregados, véanse los resultados del segundo caso, Tabla 6.11. No obstante, se observa que aunque

en el primer caso, Tabla 6.10, sus respectivas estimaciones con respecto a la concentración de agregados difieren de las nominales, se han estimado en buena medida los tamaños de los agregados. La elección de asumir que se pueden estimar las propiedades de la matriz cementicia a partir de pastas de cemento (caso uno), estará en función de la tolerancia establecida de acuerdo a las necesidades requeridas. Asimismo, se observa la problemática de la estimación conjunta de las propiedades de las matrices cementicias y del tamaño y concentración del aire ocluido. Los valores del aire ocluido difieren considerablemente de un método a otro, sin embargo, ambos métodos dan valores en un rango equivalente a las medidas por imagen. A nivel práctico, la variabilidad de esta medida es relativa, siempre que no superen un tamaño o proporción determinada, menores de 1.5 [mm] y más del 10 %. Así, estos procedimientos pueden brindar información cuando un material posee concentraciones de aire excesivo ocasionando cambios en las propiedades globales del material, y por tanto, disminuyendo las prestaciones con las cuales fueron diseñados.

## 6.5. Observaciones Finales

En este capítulo se ha comprobado experimentalmente las predicciones realizadas por el modelo dinámico autoconsistente N-fásico desarrollado en el capítulo 4. Se ha comprobado su eficacia para modelar perfiles de velocidad y atenuación de materiales cementicios fabricados con diferentes relaciones agua/cemento y agregados/cemento, así como también con diferentes granulometrías de agregados. Asimismo, se ha puesto de manifiesto que el modelo dinámico autoconsistente N-fásico brinda mejores resultados que el modelo de Waterman-Truell N-fásico para altas concentraciones de agregados. Por otra parte, han propuesto procedimientos para la estimación de parámetros microestructurales como son: la matriz cementicia, el tamaño y la concentración tanto de los agregados como del aire ocluido. A partir de pastas de cemento patrón fabricadas con una relación agua/cemento específica, se pueden determinar, siguiendo un procedimiento propuesto, las propiedades de las matrices y la atenuación por absorción de materiales cementicios fabricados con dicha relación agua/cemento, y que sirven como una buena referencia a la hora de estimar otros parámetros microestructurales de probetas de mortero con diferentes granulometrías y concentraciones de agregados. Además, se ha comprobado experimentalmente que las estimaciones obtenidas por el modelo dinámico autoconsistente N-fásico. Sin embargo, se ha observado que es necesario profundizar en el estudio con respecto a la atenuación por absorción ya que una estimación errónea de este parámetro condicionada en gran medida las correctas estimaciones del tamaño de los agregados y del aire ocluido.

---

## CAPÍTULO 7

### CONCLUSIONES

---

La caracterización de materiales cementicios mediante ultrasonidos ha demostrado en los últimos años ser una técnica de ensayos no destructivos muy prometedora. No obstante, debido a la complejidad que muestran dichos materiales, es necesario establecer con mayor precisión los mecanismos que intervienen en la propagación de las ondas ultrasónicas cuando se transmiten a través de los materiales cementicios.

En la actualidad, gracias a las poderosas herramientas de cálculo se pueden desarrollar y utilizar complejos modelos físico-matemáticos que permiten realizar una descripción muy completa de la interacción entre la onda que se propaga y las heterogeneidades presentes en los materiales. Especialmente, los modelos de dispersión múltiple ofrecen una adecuada descripción del efecto de dispersión que sufre una onda ultrasónica en términos de su longitud de onda y con el tamaño y la concentración en volumen de las heterogeneidades, permitiendo generar perfiles de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia. Uno de los modelos más utilizados dentro de este campo es el modelo de Waterman-Truell, cuyo principal inconveniente es la pérdida de eficacia en sus predicciones a medida que se incrementa la fracción volumétrica de las inclusiones del material compuesto. Un modelo que es capaz de superar esta limitación, es el denominado *Modelo Dinámico Autoconsistente*, modelo que sólo ha sido formulado para el estudio de materiales bifásicos (Yang, 2003).

Con el fin de poder estudiar y caracterizar materiales cementicios, que usualmente contienen altas concentraciones de inclusiones, se ha desarrollado en este trabajo de tesis doctoral la extensión del modelo dinámico autoconsistente para materiales N-fásicos. De este modo ha sido posible el estudio teórico de la dispersión ultrasónica en materiales cementicios.

---

Para validar experimentalmente este modelo, se han desarrollado técnicas de inspección y procesamiento de señales ultrasónicas para determinar con precisión la velocidad y la atenuación en función de la frecuencia. Asimismo, mediante la utilización de técnicas de optimización, y haciendo uso de dicho modelo, se han determinado los procedimientos más adecuados para la estimación de los parámetros microestructurales más significativos de los materiales cementicios. A continuación se especifican las principales aportaciones y conclusiones de la presente tesis doctoral:

1. Se ha extendido a materiales N-fásicos el modelo dinámico generalizado autoconsistente propuesto por Yang (2003) que sólo definía el efecto de la dispersión de las ondas ultrasónicas que se transmiten en un medio homogéneo con un único tipo de inclusiones elásticas esféricas e iguales. El modelo que se propone permite estudiar un material en el que coexisten inclusiones esféricas, elásticas, cavidades con fluidos o vacías, y con diferentes distribuciones de tamaño.
2. A partir del modelo dinámico autoconsistente N-fásico desarrollado se ha llevado a cabo un estudio teórico de la dispersión ultrasónica en materiales cementicios sobre un amplio rango de frecuencias, 0-5MHz. En este estudio, se ha puesto de manifiesto la influencia del tamaño, distribución y proporción de cavidades e inclusiones sólidas sobre las curvas de velocidad de fase y atenuación en función de la frecuencia. Las conclusiones más significativas de este estudio teórico son las siguientes:
  - 2.1. La velocidad discrimina mejor la fracción volumétrica de los constituyentes del material, mientras que la atenuación lo hace con el tamaño de las inclusiones y cavidades. Los modelos micromecánicos proporcionan información concluyente de cómo la velocidad discrimina fácilmente la concentración de los agregados pero no pueden ofrecer lo mismo con respecto a la atenuación.
  - 2.2. El comportamiento y variación de estos dos parámetros, velocidad y atenuación, dependen de la fracción volumétrica y del tamaño tanto de las inclusiones elásticas como de las cavidades, sin embargo, las inclusiones elásticas muestran una mayor influencia sobre las altas frecuencias mientras que las cavidades actúan sobre las bajas.

- 2.3. A medida que se aumenta la concentración de agregados en un material cementicio, las curvas de atenuación apenas se discriminan con este parámetro por lo que no es conveniente utilizar solamente la información de la atenuación para estudiar materiales con altas concentraciones de agregados.
  - 2.4. Diferentes distribuciones de tamaños y proporciones de inclusiones así como cavidades, pueden ser representadas mediante su tamaño medio y la fracción total, ya que sólo producen pequeñas desviaciones en las curvas de atenuación y velocidad. Estas desviaciones son algo mayores en el caso de las cavidades que en el caso de las inclusiones elásticas.
3. Se han desarrollado e implementado diferentes técnicas de inspección y procesamiento de señales ultrasónicas para la adecuada determinación de las curvas de velocidad y atenuación dependientes de la frecuencia. De este trabajo se extrajeron las siguientes conclusiones:
    - 3.1. Se mostró que la técnica de cruces por cero con pulsos de banda estrecha es la más adecuada para medir la velocidad de fase en materiales altamente dispersivos como es el caso de los materiales cementicios.
    - 3.2. En el proceso de determinación de las curvas de atenuación se desarrolló una técnica de barrido lineal de frecuencias en conjunción con un procedimiento de filtrado en el espacio tiempo-frecuencia que ha mostrado sus ventajas sobre los métodos tradicionales.
    - 3.3. Asimismo se determinó la necesidad de corregir los efectos del coeficiente de transmisión acoplante-material y difracción del transductor en la medida de la atenuación a bajas frecuencias.
  4. Se ha realizado una validación experimental, utilizando probetas de mortero, del modelo dinámico autoconsistente N-fásico comparando sus resultados con el modelo de Waterman-Truell. En estas probetas se han variado, los tipos de cemento, la relación agua/cemento, la relación agregado/cemento, la granulometría y los tipos de agregados. De esta validación experimental se han establecido diferentes conclusiones:

- 
- 4.1. El modelo es capaz de predecir perfiles de velocidad y atenuación para altas concentraciones de agregados, mostrando su eficacia y comprobándose experimentalmente hasta en un 60 %, superando la limitación de baja concentración del modelo de Waterman-Truell. Este resultado es de gran significado puesto que en la caracterización de materiales cementicios es común encontrar concentraciones superiores al 40 %, y por tanto, puede ser utilizado para materiales más complejos como el hormigón.
  - 4.2. Se ha comprobado que en concentraciones de agregados inferiores al 40 %, tanto el modelo de Waterman-Truell N-fásico como el modelo dinámico autoconsistente N-fásico, producen resultados prácticamente coincidentes con las medidas experimentales, con variaciones que no sobrepasan el 1 % con respecto a la velocidad y un 10 % con la atenuación, valores que se encuentran dentro de los límites de variación del propio material.
  - 4.3. A medida que se aumenta la concentración de agregados, el modelo dinámico autoconsistente N-fásico proporciona resultados similares a los obtenidos con bajas concentraciones, tanto para la velocidad como para la atenuación, mientras que el modelo de Waterman-Truell sólo es capaz de predecir los valores de velocidad con una variación aproximadamente menor que el 3 %.
5. Se ha desarrollado una metodología, denominada de análisis-síntesis, para la estimación de los diferentes parámetros microestructurales de los materiales cementicios. Para ello se utiliza la minimización de una función objetivo, definida mediante la diferencia entre las curvas de atenuación y velocidad sintetizadas con el modelo desarrollado y las obtenidas mediante el análisis experimental del material a caracterizar. Las principales conclusiones de este trabajo son:
    - 5.1. Se pueden estimar todos los parámetros microestructurales de los materiales cementicios que forman parte del modelo, por ejemplo, las propiedades elásticas y densidad de la matriz cementicia, el tamaño y la distribución porcentual tanto de los agregados como del aire ocluido. Sin embargo, no es posible estimar todos a la vez. Esto es debido a que no existen relaciones biunívocas entre los parámetros microestructurales y las curvas de velocidad y atenuación en función

de la frecuencia. Por tanto, siempre será necesario conocer o estimar *a priori* algunas de sus variables.

- 5.2. Entre las variables que se recomienda conocer antes de aplicar el proceso de análisis-síntesis, quizás la más indicada es el coeficiente de absorción de la matriz cementicia, ya que se ha mostrado en este trabajo que es un parámetro que produce muchas indeterminaciones con respecto a las propiedades de la matriz cementicia. Para su conocimiento, se estableció un procedimiento que estima este coeficiente a partir de pastas de cemento. Conocido este coeficiente, y asumiendo que se mantiene constante en los materiales a caracterizar, se obtienen resultados equiparables a los obtenidos por técnicas destructivas a la hora de estimar otros parámetros microestructurales en probetas de mortero como son las constantes elásticas de la matriz, y las granulometrías y concentraciones de los agregados y del aire ocluido.

Como conclusión final se puede decir que el modelo dinámico autoconsistente N-fásico desarrollado es capaz de describir la propagación de ondas mecánicas en medios heterogéneos de alta complejidad, como es el caso de los materiales cementicios. La principal aportación de este modelo es que permite conocer los límites de la evaluación no destructiva por ultrasonidos para estimar las variables microestructurales de materiales tan complejos como los cementicios, a la vez que proporciona una metodología de medición de estos mismos parámetros.

### **Líneas de Investigación futuras**

Aunque los primeros resultados alcanzados han sido bastante prometedores es necesario seguir avanzando en dos líneas principales:

1. Incorporar efectos físicos y propiedades de los materiales en el modelo dinámico autoconsistente N-fásico que no han sido considerados en este trabajo, como:
  - Adaptar al modelo dinámico autoconsistente N-fásico para el estudio de la matriz cementicia como un medio viscoelástico.

- 
- Formular el modelo dinámico autoconsistente N-fásico para inclusiones con geometría no esférica, como primer objetivo con forma cilíndrica, para poder estudiar el comportamiento de materiales cementicios con distintas adiciones de fibras.
2. Implementar la metodología de evaluación no destructiva desarrollada de caracterización microestructural para:
- Realizar la validación experimental del modelo y de la metodología de evaluación en la caracterización del hormigón.
  - Adaptar la metodología de medida desarrollada para poder utilizarla fuera del laboratorio, en aplicaciones tanto de monitorización del fraguado como de evaluación del deterioro de los materiales cementicios. Para ello, será necesario en primer lugar evaluar la utilización de otras formas de acoplamiento, principalmente por contacto.







---

## ANEXO A

# MODELOS CLÁSICOS PARA LA CARACTERIZACIÓN DE MATERIALES COMPUESTOS

---

### A.1. Introducción

La teoría de materiales compuestos ha sido ampliamente utilizada para modelar el comportamiento elástico de cerámicas, rocas, suelos, etc. La mayoría de los modelos multifásicos parten de considerar al material bajo una condición de esfuerzo o deformación uniforme, así como de asociar una distribución determinada de las fases.

Los modelos bifásicos más simples para el estudio de la influencia de las fases en las propiedades globales del compuesto son los modelos de Reuss (1929) y Voigt (1928), denominados también como modelos serie y paralelo, respectivamente. El primero como su nombre lo indica supone la distribución de las fases perpendicular a la carga aplicada, mientras que el segundo asume que las fases están en paralelo a la carga. Un resultado importante fue obtenido por Hill (1952), quien usando varias consideraciones de energía a partir de la teoría de elasticidad, mostró que las suposiciones de los modelos serie y paralelo conducen a las fronteras superior e inferior de los módulos transversal y volumétrico. Este resultado es significativo porque conociendo el módulo elástico de las distintas fases y sus fracciones de volumen, se pueden determinar los valores máximos y mínimos del módulo de elasticidad que podrá tener el material. Si los valores máximos y mínimos están muy cerca, el problema puede ser resuelto desde el punto de vista del cálculo de estructuras. Sin embargo cuando las inclusiones duras están dispersas en una matriz blanda, los valores máximos y mínimos estarán mas distantes. Otros modelos como el de Hirsch (1962) y Counto (1964) mejoraron los modelos serie y paralelo. La formulación de estos modelos y la distribución de las fases se muestran en la Tabla A.1.

Modelo	Módulo de Elasticidad	Esquema
Paralelo	$E = \phi_1 E_1 + \phi_2 E_2$	
Serie	$\frac{1}{E} = \frac{\phi_1}{E_1} + \frac{\phi_2}{E_2}$	
Counto	$\frac{1}{E} = \frac{1 - \sqrt{\phi_2}}{E_1} + \frac{\sqrt{\phi_2}}{(1 - \sqrt{\phi_2}) E_1 + \sqrt{\phi_2} E_2}$	
Hirsch	$\frac{1}{E} = (1 - x) \left[ \frac{\phi_1}{E_1} + \frac{\phi_2}{E_2} \right] + x \left[ \frac{1}{\phi_1 E_1 + \phi_2 E_2} \right]$	
$\phi_1, \phi_2$ : Fracción de volumen de la matriz y la inclusión $E_1, E_2$ : Módulo de Elasticidad de la matriz y la inclusión $E$ : Módulo de Elasticidad del material compuesto		

**Tabla A.1.** Modelos clásicos bifásicos.

Por otra parte, las fronteras de Hashin-Shtrikman, el modelo de Kuster-Toksöz, y el modelo estático generalizado autoconsistente de Christensen-Lo, proporcionan la estimación de los módulos elásticos de un material compuesto sin asumir una configuración serie o paralelo de las fases, únicamente suponiendo que las inclusiones están embebidas en la matriz. Estos modelos son descritos a continuación.

## A.2. Fronteras de Hashin-Shtrikman

Las expresiones analíticas propuestas por Hashin y Shtrikman (1963) brindan las fronteras para las constantes elásticas de un material heterogéneo e isotrópico con una distribución aleatoria de las fases a partir de las propiedades y fracción de volumen de cada fase. El mo-

delo está basado en un principio variacional, el cual combinado con la hipótesis de isotropía, conduce al cálculo de la deformación promedio en una de las fases en la misma forma que el problema de la inclusión fue resuelto por Eshelby (1957). La frontera inferior es construida con la fase blanda y la frontera superior con la fase dura. La forma esférica de la inclusión refleja la distribución isotrópica de fase. Usando los principios de variaciones en la teoría lineal de elasticidad, Hashin y Shtrikman derivaron las fronteras superior e inferior del módulo elástico de los materiales multifásicos cuasi-homogéneos y cuasi-isotrópicos, con fases de geometría arbitraria. Cuando la relación entre los módulos de las diferentes fases no es muy grande, las fronteras están muy próximas y son capaces de dar una buena estimación del módulo efectivo del material compuesto. Estas fronteras son más estrictas que las suministradas por los modelos serie y paralelo, por lo que la determinación de los módulos elásticos pueden ser más precisos. Las fronteras superior e inferior para el módulo volumétrico y transversal dado un material bifásico, son:

$$K_{inf} = K_1 + \frac{\phi(K_2 - K_1)(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)}{(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1) + (1 - \phi)(K_2 - K_1)} \quad (\text{A.2.1})$$

$$K_{sup} = K_2 + \frac{(1 - \phi)(K_1 - K_2)(K_2 + \frac{4}{3}\mu_2)}{(K_2 + \frac{4}{3}\mu_2) + \phi(K_1 - K_2)} \quad (\text{A.2.2})$$

$$\mu_{inf} = \mu_1 + \frac{5\mu_1\phi(\mu_2 - \mu_1)(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)}{5\mu_1(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1) + 2(1 - \phi)(K_1 + 2\mu_1)(\mu_2 - \mu_1)} \quad (\text{A.2.3})$$

$$\mu_{sup} = \mu_2 + \frac{5\mu_2(1 - \phi)(\mu_1 - \mu_2)(K_2 + \frac{4}{3}\mu_2)}{5\mu_2(K_2 + \frac{4}{3}\mu_2) + 2\phi(K_2 + 2\mu_2)(\mu_1 - \mu_2)} \quad (\text{A.2.4})$$

Para que estas ecuaciones sean válidas se debe cumplir que  $K_2 > K_1$  y  $\mu_2 > \mu_1$  lo que significa que las inclusiones sean más rígidas que la matriz. En el caso de que las inclusiones sean menos rígidas que la matriz o que la fase inclusión sea una fase de fluido, las fronteras no son de valor práctico.

### A.3. Modelo de Kuster-Toksöz

El modelo de Kuster y Toksöz (1974) determina los módulos efectivos elásticos de un medio compuesto de  $N$  fases, formulado mediante la aproximación en el régimen de Rayleigh de los coeficientes de dispersión para las ondas longitudinales  $A_n$ , ver §4.2.1 y §4.2.3. Este modelo considera un medio compuesto que contiene  $N - 1$  inclusiones de radio  $a$  con módulo volumétrico  $K_2$ , módulo transversal  $\mu_2$  y densidad  $\rho_2$ , embebidos en una matriz infinita caracterizada por los módulos  $K_1$ ,  $\mu_1$  y densidad  $\rho_1$ . Las inclusiones están confinadas en una región

finita y esférica con volumen  $\mathbb{V}_0$  dentro de la matriz infinita. Este modelo no toma en cuenta los efectos de la dispersión múltiple y asume que la longitud de onda es mucho mayor que el tamaño de las inclusiones. El modelo supone que las características del medio efectivo pueden ser estimadas ya que el campo de desplazamiento debido a la dispersión por una esfera efectiva homogénea, que ocupa el mismo volumen que  $\mathbb{V}_0$ , puede ser equivalente que aquél debido a la dispersión de las inclusiones del material compuesto inicial. Las ecuaciones fundamentales dadas por este modelo son:

$$A_0(K_1, \langle K \rangle, \mu_1) = \phi A_0(K_1, K_2, \mu_1) \quad (\text{A.3.1})$$

$$A_1(\rho_1, \langle \rho \rangle) = \phi A_1(\rho_1, \rho_2) \quad (\text{A.3.2})$$

$$A_2(\mu_1, \langle \mu \rangle, K_1) = \phi A_2(\mu_1, \mu_2, K_1) \quad (\text{A.3.3})$$

donde la fracción volumétrica  $\phi = \sum_i \frac{a_i}{a^3}$ . Para una matriz sólida elástica, el modelo puede ser escrito como, véase las ecuaciones (4.2.54)-(4.2.56):

$$\frac{K_1 - \langle K \rangle}{\langle K \rangle + \frac{4}{3}\mu_1} = \phi \frac{K_1 - K_2}{K_2 + \frac{4}{3}\mu_1} \quad (\text{A.3.4})$$

$$\rho_1 - \langle \rho \rangle = \phi(\rho_1 - \rho_2) \quad (\text{A.3.5})$$

$$\frac{\langle \mu \rangle - \mu_1}{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1) + 6\langle \mu \rangle(K_1 + 2\mu_1)} = \phi \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1) + 6\mu_2(K_1 + 2\mu_1)} \quad (\text{A.3.6})$$

Despejando los valores efectivos, se tiene que:

$$\langle K \rangle = \frac{K_1(3K_2 + 4\mu_1) + 4\mu_1\phi(K_2 - K_1)}{3K_2 + 4\mu_1 - 3\phi(K_2 - K_1)} \quad (\text{A.3.7})$$

$$\langle \rho \rangle = (1 - \phi)\rho_1 + \phi\rho_2 \quad (\text{A.3.8})$$

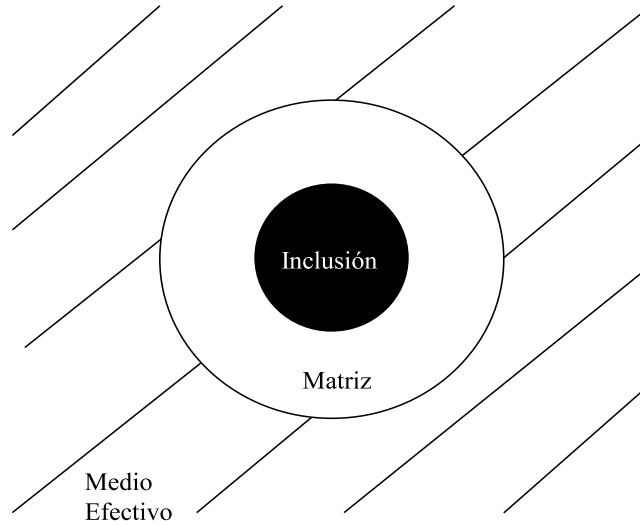
$$\langle \mu \rangle = \mu_1 \left[ \frac{\mu_2(6K_1 + 12\mu_1) + ([1 - \phi]\mu_1 + \phi\mu_2)(9K_1 + 8\mu_1)}{\mu_1(9K_1 + 8\mu_1) + ([1 - \phi]\mu_2 + \phi\mu_1)(6K_1 + 12\mu_1)} \right] \quad (\text{A.3.9})$$

Este modelo es una buena aproximación cuando la matriz ocupa al menos el 70-80 % del volumen total del material compuesto como lo mencionaron Berryman y Berge (1996), especialmente para el caso de rocas, no obstante, esta sugerencia no podría ser generalizada y dependerá de la propia aplicación.

#### A.4. Método Generalizado Autoconsistente Estático

El modelo propuesto por Christensen y Lo (1979) considera una única esfera embebida en un medio infinito con propiedades efectivas desconocidas. Este medio efectivo (homogéneo)

posee las mismas condiciones promedio de esfuerzo y deformación que el modelo presentado en el Figura A.1. Las inclusiones pueden tener diferentes tamaños y están rodeadas por un matriz de manera que la relación entre el radio de la inclusión y el radio de la matriz sea constante. La solución exacta del problema del medio efectivo para una configuración



**Figura A.1.** Modelo geométrico de tres fases, medio efectivo-matriz-inclusión.

conocida como de tres fases, medio efectivo-matriz-inclusión, está dada por la solución de la ecuación cuadrática siguiente:

$$A \left( \frac{\mu}{\mu_1} \right)^2 + 2B \left( \frac{\mu}{\mu_1} \right) + C = 0 \quad (\text{A.4.1})$$

donde

$$A = 8M(4 - 5\nu_1)\eta_1 c^{10/3} - 2G + 252M\eta_2 c^{5/3} - 50M(7 - 12\nu_1 + 8\nu_1^2)\eta_2 c + 4(7 - 10\nu_1)\eta_2 \eta_3 \quad (\text{A.4.2})$$

$$B = -2M(1 - 5\nu_1)\eta_1 c^{10/3} + 2G - 252M\eta_2 c^{5/3} + 75M(3 - \nu_1)\eta_2 \nu_1 c + \frac{3}{2}(15\nu_1 - 7)\eta_2 \eta_3 \quad (\text{A.4.3})$$

$$C = 4M(5\nu_1 - 7)\eta_1 c^{10/3} - 2G + 252M\eta_2 c^{5/3} + 25M(\nu_1^2 - 7)\eta_2 c - (7 + 5\nu_1)\eta_2 \eta_3 \quad (\text{A.4.4})$$

con

$$G = (63M\eta_2 + 2\eta_1\eta_3)c^{7/3} \quad (\text{A.4.5})$$

$$M = \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \quad (\text{A.4.6})$$

$$\eta_1 = M(7 - 10\nu_1)(7 + 5\nu_2) + 105(\nu_2 - \nu_1) \quad (\text{A.4.7})$$

$$\eta_2 = M(7 + 5\nu_2) + 35(1 - \nu_2) \quad (\text{A.4.8})$$

$$\eta_3 = M(8 - 10\nu_1) + 15(1 - \nu_1) \quad (\text{A.4.9})$$

donde los subíndices 1 y 2 se refieren a las propiedades de la matriz y las inclusiones, respectivamente,  $\nu$  indica el coeficiente de Poisson. El módulo volumétrico es obtenido por:

$$K = K_1 + \frac{\phi(K_2 - K_1)(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1)}{(K_1 + \frac{4}{3}\mu_1) + (1 - \phi)(K_2 - K_1)} \quad (\text{A.4.10})$$



## MÉTODO N-FÁSICO AUTOCONSISTENTE DE SABINA-WILLIS

### B.1. Formulación

El método autoconsistente desarrollado por Sabina y Willis (1988) es una aproximación de punto fijo para el tensor de módulos elásticos y la densidad de masa. Este modelo es de carácter general, es decir, considera un material elástico heterogéneo compuesto de un sólido elástico (matriz) caracterizada por su densidad  $\rho_1$  y su tensor de módulos elásticos  $C_1$  y  $N - 1$  tipos de partículas elásticas como inclusiones, cada inclusión con subíndice  $r = 2, \dots, N - 1$  tiene una densidad  $\rho_r$ , un tensor de módulos elásticos  $C_r$  y la misma forma y tamaño. Así cada una de las inclusiones ocupa un dominio  $\mathbf{x}' + \Omega_r$ , donde  $\Omega_r$  define el tamaño y la forma de la inclusión y  $\mathbf{x}'$  el vector de posición de su centro de masa. Además, se supone que la distribución de sus centros de masa  $r$  es uniforme e isotrópica, es decir, la densidad de probabilidad de encontrar a una inclusión de tipo  $r$  centrada en el punto  $\mathbf{x}'$  es igual a  $n_r$ . La probabilidad de que a un punto  $\mathbf{x}'$  le corresponda el material del tipo  $r$  es igual a la fracción volumétrica  $\phi = n_r |\Omega_r|$ , donde  $|\Omega_r|$  es el volumen que ocupa una inclusión de tipo  $r$ . La fracción de volumen de la matriz se denota como  $\phi_1$  y se satisface que la suma de las fracciones de la matriz ( $r = 1$ ) y las inclusiones ( $r = 2, \dots, N - 1$ ) es igual con la unidad,  $\sum_{r=1}^N \phi_r = 1$ . Este método plantea el problema al calcular el promedio  $\langle u \rangle$  del campo de desplazamiento  $u$  al considerar todas las posibles configuraciones del material. En ausencia de fuerzas externas, la respuesta del material compuesto está regida por la ecuación de movimiento, en función del tensor de esfuerzos y el campo de desplazamientos:

$$\text{div } \sigma = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{B.1.1})$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa del compuesto. Asimismo, el tensor de esfuerzos del material compuesto está relacionado con el tensor de deformaciones por medio del tensor de módulos elásticos del material (ver §3.2.1). El tensor de módulos elásticos  $C$  y la densidad varían con respecto a la posición  $\mathbf{x}$ ; en particular toman los valores de  $C_r$  y  $\rho_r$  cuando  $\mathbf{x}$  está en la

inclusión de tipo  $r$ :

$$C(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^N C_r f_r(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1.2})$$

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{r=1}^N \rho_r f_r(\mathbf{x}) \quad (\text{B.1.3})$$

donde

$$f_r(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \text{material } r \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases} \quad (\text{B.1.4})$$

Si tomamos en cuenta un promedio de la expresión (B.1.1), tenemos una relación entre el tensor de esfuerzos promedio  $\langle \sigma \rangle$ , el campo de desplazamiento promedio  $\langle u \rangle$ , y por consiguiente, una relación entre el tensor de deformaciones promedio,  $\langle \varepsilon \rangle$ , pudiendo escribir lo siguiente:

$$\langle \sigma \rangle = \sum_{r=1}^N \phi_r \langle \sigma \rangle_r = \sum_{r=1}^N \phi_r C_r \langle \varepsilon \rangle_r \quad (\text{B.1.5})$$

donde  $\phi_r = \langle f_r(\mathbf{x}) \rangle$ ,  $\langle \sigma \rangle_r$  y  $\langle \varepsilon \rangle_r$  son los valores esperados de  $\sigma$  y  $\varepsilon$  en la posición  $\mathbf{x}$  condicionado a encontrar el material tipo  $r$  en esa misma posición. Además, podemos escribir ésta última ecuación como:

$$\langle \sigma \rangle = C_1 \langle \varepsilon \rangle + \sum_{r=2}^{N-1} \phi_r (C_r - C_1) \langle \varepsilon \rangle_r \quad (\text{B.1.6})$$

La solución de esta expresión al ser resuelta nos proporciona las relaciones constitutivas del material compuesto o equivalente, pero para obtener dicha solución se debe conocer la microestructura del compuesto. Un procedimiento simple para la estimación aproximada de  $\langle \varepsilon \rangle_r$  fue propuesto por Sabina-Willis, considerando una única inclusión de tipo  $r$  embebida en un material homogéneo cuyas propiedades son precisamente las correspondientes al medio efectivo que por el momento son desconocidas,  $C$  y  $\rho$ . Por tanto, se plantea el siguiente problema: cuál es el estado de esfuerzo debido a la acción de una onda plana, donde el campo de desplazamiento que incide sobre la inclusión es  $u_0$ , y se establece un único problema de un sólo dispersor. La onda que se propaga en el material de propiedades efectivas  $C$  y  $\rho$  debe ser la onda promedio  $\langle u \rangle$ , por lo que  $u_0$  debe ser igual a  $\langle u \rangle$  por autoconsistencia, es decir, independiente del centro  $\mathbf{x}'$ . Una vez que se ha resuelto el problema de un dispersor se conoce el desplazamiento  $u(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')$ , la deformación  $\varepsilon(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}')$ , etc. Por tanto, el promedio condicionado  $\langle \varepsilon(\mathbf{x}, t) \rangle_r$ , está dado por:

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x}, t) \rangle_r = \frac{1}{|\Omega_r|} \int_{\Omega_r} \varepsilon(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (\text{B.1.7})$$

donde  $U_r$  es el conjunto  $\{\mathbf{x}' : \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in \Omega_r\}$ . El conjunto de todas las posibles configuraciones está dado por todas las posibles posiciones del centro de masa  $\mathbf{x}'$  de una inclusión de tipo  $r$  en la matriz de propiedades efectivas  $C$  y  $\rho$ . Así, cualquier campo promedio está referido a ese conjunto y el campo promedio condicional es aquél que consiste en considerar sólo aquellos elementos del conjunto de todas las posibles configuraciones tales que en la posición  $\mathbf{x}$  se encuentra la inclusión del tipo  $r$  y además  $\mathbf{x}$  está contenida en el conjunto  $\mathbf{x}' + \Omega_r$  que es el conjunto  $U_r$ . El resultado principal del planteamiento de Sabina-Willis son las ecuaciones autoconsistentes expresadas como:

$$C = C_1 + \sum_{r=2}^{N-1} \phi_r h_r(k) h_r(-k) (C_r - C) [I + \bar{S}_x^{(r)}(L_r - L)] \quad (\text{B.1.8})$$

$$\rho = \rho_1 + \sum_{r=2}^{N-1} \phi_r h_r(k) h_r(-k) (\rho_r - \rho) [I + \bar{M}_t^{(r)}(\rho_r - \rho)] \quad (\text{B.1.9})$$

donde  $h_r(k) = \int_{|\Omega_r|} e^{ik \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}$ ,  $\bar{S}_x^{(r)}$  y  $\bar{M}_t^{(r)}$  son operadores definidos en términos de la función de Green del medio de referencia, véase (Sabina y Willis, 1988). Estas ecuaciones son independientes de la geometría de la inclusión.

## B.2. Expresiones del método N-fásico autoconsistente

Para el caso de  $N - 1$  tipos diferentes de inclusiones esféricas, las ecuaciones autoconsistentes están expresadas como:

$$K = K_1 + \sum_{r=2}^{N-1} \phi_r \frac{h_r(k) h_r(-k) (K_r - K_1) (3K + 4\mu)}{3K + 4\mu + 3\epsilon_{\alpha,r} (K_r - K)} \quad (\text{B.2.1})$$

$$\mu = \mu_1 + \sum_{r=2}^{N-1} \phi_r \frac{h_r(k) h_r(-k) (\mu_r - \mu_1) [5\mu (3K + 4\mu)]}{5\mu (3K + 4\mu) + 2 [2\mu \epsilon_{\alpha,r} + (3K + 4\mu) \epsilon_{\beta,r}] (\mu_r - \mu)} \quad (\text{B.2.2})$$

$$\rho = \rho_1 + \sum_{r=2}^{N-1} \phi_r \frac{h_r(k) h_r(-k) (\rho_r - \rho_1) (3\rho)}{3\rho + (3 - \epsilon_{\alpha,r} - \epsilon_{\beta,r}) (\rho_r - \rho)} \quad (\text{B.2.3})$$

donde

$$h_r(k) = \frac{3 [\sin(ka_r) - (ka_r) \cos(ka_r)]}{(ka_r)^3} \quad (\text{B.2.4})$$

$$\epsilon_{\alpha,r} = \frac{3(1 - ika_r)}{(ka_r)^3} [\sin(ka_r) - (ka_r) \cos(ka_r)] e^{ika_r} \quad (\text{B.2.5})$$

$$\epsilon_{\beta,r} = \frac{3(1 - i\kappa a_r)}{(\kappa a_r)^3} [\sin(\kappa a_r) - (\kappa a_r) \cos(\kappa a_r)] e^{i\kappa a_r} \quad (\text{B.2.6})$$

y los números de onda longitudinal y transversal efectivos escritos como:

$$k = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad (\text{B.2.7})$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (\text{B.2.8})$$

Este modelo conduce a resultados aceptables siempre y cuando la longitud de onda de las ondas elásticas que se propaguen en el material compuesta sea más grande que cuatro veces el radio de las inclusiones,  $\lambda \geq 4a$ .

## CARACTERIZACIÓN DE LA POROSIDAD DE LAS MUESTRAS

### C.1. Ensayo de porosidad accesible al agua

La caracterización de la microestructura porosa de los especímenes se realizó mediante la técnica de porosidad accesible al agua (RILEM, 1984). Esta técnica mide la masa de la muestra en estado de superficie seca y saturada  $m_{ss}$ , la masa de la muestra pesada en inmersión  $m_{in}$  y la masa de la muestra seca  $m_s$ . A partir de esta información se obtiene el porcentaje de porosidad accesible  $p$ , la densidad aparente<sup>1</sup>  $\rho_{ap}$  y la densidad real de las muestras  $\rho_{real}$ , mediante las siguientes expresiones:

$$p = \frac{(m_{ss} - m_s)}{(m_{ss} - m_{in})} \quad (C.1.1)$$

$$\rho_{ap} = \frac{m_s}{m_{ss} - m_{in}} \rho_w \quad (C.1.2)$$

$$\rho_{real} = \frac{m_s}{(m_s - m_{in})} \rho_w \quad (C.1.3)$$

donde  $\rho_w$  es la densidad del agua. La densidad real en términos de la densidad aparente y la porosidad queda determinada por:

$$\rho_{real} = \frac{\rho_{ap}}{1 - p} \quad (C.1.4)$$

La densidad aparente y real sin considerar a los agregados (densidad de la matriz) se obtienen como sigue:

$$\rho_{ap_\phi} = \frac{\rho_{ap} - \phi_N \rho_{ag}}{1 - \phi_N} \quad (C.1.5)$$

$$\rho_{real_\phi} = \frac{\rho_{real} - \phi_N \rho_{ag}}{1 - \phi_N} \quad (C.1.6)$$

donde  $\phi_N$  y  $\rho_{ag}$  son la concentración nominal y densidad de los agregados, respectivamente.

<sup>1</sup>La densidad aparente es aquélla que considera el volumen de la estructura porosa, mientras que la densidad real excluye este volumen.

Por otra parte, la porosidad  $p$  medida se refiere a la porosidad total accesible. Para obtener la porosidad correspondiente a la matriz cementicia, se emplea la siguiente expresión:

$$p_\phi = \frac{p}{1 - \phi} \quad (\text{C.1.7})$$

De este modo, la porosidad de la matriz siempre será mayor que la asociada al material compuesto. En las Tablas C.1 y C.2 se presentan las mediciones de porosidad y densidad para las probetas de mortero con microesferas de vidrio, mientras que en la Tabla C.3 con relación a las probetas de mortero con áridos, respectivamente.

Muestras	Grupo I w/c: 0.35					
	$\rho_{ap}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_{ap_\phi}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_{real}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_{real_\phi}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$p$ [%]	$p_\phi$ [%]
PC000	1909	1909	2306	2306	17.24	17.24
M025S1	2008	1932	2342	2318	14.26	16.47
M025S2	1997	1919	2344	2320	14.81	17.10
M025S3	1996	1918	2357	2335	15.32	17.69
M050S1	2061	1925	2348	2301	12.23	16.03
M050S2	2053	1914	2355	2310	12.82	16.80
M050S3	2074	1942	2392	2359	13.27	17.39
M100S1	2083	1826	2346	2251	11.24	18.16
M100S2	2118	1883	2366	2284	10.48	16.93
M100S3	2163	1956	2432	2390	11.06	17.83

**Tabla C.1.** Ensayo de porosidad conectada de muestras de mortero con microesferas de vidrio (w/c)=0.35.

Muestras	Grupo I w/c: 0.40					
	$\rho_{ap}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_{ap_\phi}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_{real}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_{real_\phi}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$p$ [%]	$p_\phi$ [%]
PC000	1821	1821	2292	2292	20.54	20.54
M025S1	1943	1863	2329	2304	16.55	18.94
M025S2	1935	1854	2359	2339	17.97	20.56
M025S3	1938	1857	2335	2311	16.99	19.44
M050S1	1986	1838	2334	2286	14.90	19.20
M050S2	1992	1845	2363	2324	15.67	20.19
M050S3	1992	1845	2384	2351	16.44	17.10
M100S1	2063	1811	2351	2265	12.25	19.32
M100S2	2081	1839	2377	2306	12.45	19.64
M100S3	2118	1898	2433	2394	12.96	20.44

**Tabla C.2.** Ensayo de porosidad conectada de muestras de mortero con microesferas de vidrio (w/c)=0.40.

### C. CARACTERIZACIÓN DE LA POROSIDAD DE LAS MUESTRAS

Muestras	$\rho_{ap}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_{ap\phi}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_{real}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$\rho_{real\phi}$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$p$ [ %]	$p_{\phi}$ [ %]
M300G1W65	1951	1096	2545	2397	23.36	51.12
M300G2W52	2082	1273	2542	2366	18.11	43.02
M300G3W46	2133	1333	2544	2357	16.17	40.22
M100G0W38	2088	1765	2555	2491	18.28	28.43
M200G0W45	2180	1686	2560	2449	14.84	29.80
M300G0W46	2170	1426	2546	2362	14.77	36.74

**Tabla C.3.** *Ensayo de porosidad conectada de muestras de mortero con granos de arena.*





## REFERENCIAS

---

- AGGELIS, D.G. y PHILIPPIDIS, T.P. (2004). «Ultrasonic wave dispersion and attenuation in fresh mortar». *NDT&E International*, **37(8)**, pp. 617–631.
- AGGELIS, D.G.; POLYZOS, D. y PHILIPPIDIS, T.P. (2005). «Wave dispersion and attenuation in fresh mortar: theoretical predictions vs. experimental results». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **53(4)**, pp. 857–883.
- AGGELIS, D.G.; SHIOTANI, T.; PHILIPPIDIS, T.P. y POLYZOS, D. (2008). «Stress wave scattering: friend or enemy of non destructive testing of concrete?» *Journal of Solid Mechanics and Materials Engineering*, **2(4)**, pp. 397–408.
- AGGELIS, D.G.; TSINOPOULOS, S.V. y POLYZOS, D. (2004). «An iterative effective medium approximation (IEMA) for wave dispersion and attenuation predictions in particulate composites, suspensions and emulsions». *Journal of the Acoustical Society of America*, **116(6)**, pp. 3443–3452.
- AHMED, S. y JONES, F.R. (1990). «A review of particulate reinforcement theories for polymer composites». *Journal of Materials Science*, **25(12)**, pp. 4933–4942.
- ALLEGRA, J.R. y HAWLEY, S.A. (1972). «Attenuation of sound in suspensions and emulsions: theory and experiments». *Journal of the Acoustical Society of America*, **51**.
- ANSON, L.W. y CHIVERS, R.C. (1989). «Ultrasonic propagation in suspensions-A comparison of a multiple scattering and an effective medium approach». *Journal of the Acoustical Society of America*, **85(2)**, pp. 535–540.
- (1993). «Ultrasonic velocity in suspensions of solids in solids -a comparison of theory and experiment-». *Journal of Physics*, **26(10)**, pp. 1566–1575.
- ANUGONDA, P.; WIEHN, J.S. y TURNER, J.A. (2001). «Diffusion of ultrasound in concrete». *Ultrasonics*, **39(6)**, pp. 429–435.
- AUGER, F. y FLANDRIN, P. (1995). «Improving the readability of time-frequency and time-scale representations by the reassignment method». *IEEE Transactions on Signal Processing*, **43(5)**, pp. 1068–1089.
- AULD, B.A. (1973). *Acoustic fields and waves in solids*. volumen Volumen I. Wiley Interscience publication.

- BASS, R. (1958). «Diffraction effects in the ultrasonic field of a piston source». *Journal of the Acoustical Society of America*, **30(7)**, pp. 602–605.
- BECKER, J.; JACOBS, L.J.; ASCE, M. y QU, J. (2003). «Characterization of cement-based materials using diffuse ultrasound». *Journal of Engineering mechanics*, **129(12)**, pp. 1478–1484.
- BELTZER, A.I. y BRAUNER, N. (1987). «The dynamic response of random composites by a causal differential method». *Mechanics of Materials*, **6(4)**, pp. 337–345.
- (1989). «The dynamic response of random composites by a causal differential method». *Mechanics of Materials*, **7(4)**, p. 347.
- BENVENISTE, Y. (2008). «Revisiting the generalized self-consistent scheme in composites: Clarification of some aspects and a new formulation». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **56**, pp. 2984–3002.
- BERRIMAN, J.R.; HUTCHINS, D.A.; NEILD, A.; GAN, T.H. y PURNELL, P. (2006). «The application of time-frequency analysis to the air-coupled ultrasonic testing of concrete». *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **53(4)**, pp. 768–776.
- BERRYMAN, J.G. (1980). «Long-wavelength propagation in composite elastic media I. Spherical inclusions». *Journal of the Acoustical Society of America*, **68(6)**, pp. 1809–1819.
- BERRYMAN, J.G. y BERGE, P.A. (1996). «Critique of two explicit schemes for estimating elastic properties of multiphase composites». *Mechanics of Materials*, **22(2)**, pp. 149–164.
- BIWA, S. (2001). «Independent scattering and wave attenuation in viscoelastic composites». *Mechanics of materials*, **33(11)**, pp. 635–647.
- BIWA, S.; YAMAMOTO, S.; KOBAYASHI, F. y OHNO, N. (2004). «Computational multiple scattering analysis for shear wave propagation in unidirectional composites». *International Journal of Solids and Structures*, **41(2)**, pp. 435–457.
- BOSE, S.K. y MAL, A.K. (1973a). «Elastic waves in a fiber-reinforced composite». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **22(3)**, pp. 217–229.
- (1973b). «Longitudinal shear waves in a fiber-reinforced composite». *International Journal of Solids and Structures*, **9(9)**, pp. 1075–1085.
- BRILL, D. y GAUNAURD, G. (1987). «Resonance theory of elastic waves ultrasonically scattered from an elastic sphere». *Journal of the Acoustical Society of America*, **81(1)**, pp. 1–21.
- BUDIANSKY, B. (1965). «On the elastic moduli of some heterogeneous materials». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **13(4)**, pp. 223–227.
- BUENO, S.; HERNÁNDEZ, M.G.; SÁNCHEZ, T.; J.J., ANAYA y BAUDÍN, C. (2008). «Non-destructive characterisation of alumina/aluminium titanate composites using a micromechanical model and ultrasonic determinations Part I. Evaluation of the effective elastic

- constants of aluminium titanate». *Ceramics International*, **34**, pp. 181–188.
- CHAFFAI, S.; BERGER, G. y LAUGIER, P. (1998). «Frequency variation of ultrasonic attenuation coefficient of cancellous bone between 0.2 and 2.0 MHz». *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 1397–1400.
- CHAIX, J.F.; GARNIER, V. y CORNELOUP, G. (2003). «Concrete damage evolution analysis by backscattered ultrasonic waves». *NDT&E International*, **36**(7), pp. 461–469.
- (2006). «Ultrasonic wave propagation in heterogeneous solid media: Theoretical analysis and experimental validation». *Ultrasonic*, **44**, pp. 200–210.
- CHALLIS, R.E.; TEBBUTT, J.S. y HOLMES, A.K. (1998). «Equivalence between three scattering formulations for ultrasonic wave propagation in particulate mixtures». *Journal of Physics*, **31**, pp. 3481–3497.
- CHRISTENSEN, R.M. y LO, K.H. (1979). «Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinders models». *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **27**(4), pp. 315–330.
- COHEN, LEON (1995). *Time-Frequency Analysis*. Prentice-Hall signal processing series. Prentice Hall PTR.
- COUNTO, U.J. (1964). «The effect of the elastic modulus of aggregate on the elastic modulus, creep and creep recovery of concrete». *Magazine of Concrete Research*, **16**(48), pp. 129–138.
- DATTA, S.K.; LEDBETTER, H.M.; SHINDO, Y. y SHAH, A.H. (1988). «Phase velocity and attenuation of plane elastic waves in a particle-reinforced composite medium». *Wave Motion*, **10**(2), pp. 171–182.
- DEL RÍO, L.M.; JIMÉNEZ, A.; LÓPEZ, F.; ROSA, F.J.; RUFO, M.M. y PANIGUA, J.M. (2004). «Characterization and hardening of concrete with ultrasonic testing». *Ultrasonics*, **42**(1-9), pp. 527–530.
- DROIN, P.; BERGER, G. y LAUGIER, P. (1998). «Velocity dispersion of acoustic waves in cancellous bone». *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, **45**(3), pp. 581–592.
- EINSPRUCH, N.G. y TRUELL, R. (1960). «Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical fluid obstacle in an elastic medium». *Journal of the Acoustical Society of America*, **32**(2), pp. 214–220.
- EPSTEIN, P.S. y CARHART, R.R. (1953). «The absorption of sound in suspensions and emulsions I. Water fog in air». *Journal of Acoustic Society of America*, **25**, pp. 553–565.
- ESHELBY, J.D. (1957). «The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems». *Proceedings of Royal Society of London, Series A, Mathematical and*

- Physical Sciencies*, **241(1226)**, pp. 376–396.
- FERNÁNDEZ-CANOVAS, M. (2002). *Hormigón*. Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos. Servicios de Publicaciones-Colección de Escuelas, Madrid, España, sexta edición edición.
- FINK, M. y CARDOSO, J.-F. (1984). «Diffraction effects in pulse-echo measurement». *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, **SU-31(4)**, pp. 313–329.
- FOLDY, L. (1945). «The Multiple Scattering of Waves». *Physical Review*, **67(3-4)**, pp. 107–119.
- GAYDECKI, P.A.; BURDEKIN, F.M.; DARNAJ, W.; JOHN, D.G. y PAYNE, P.A. (1992). «Propagation and attenuation of medium-frequency ultrasonic waves in concrete. A signal analytical approach». *Measurement Science & Technology*, **3(1)**, pp. 126–134.
- GRAFF, K. (1991). *Wave motion in elastic solids*. Dover Publications.
- GUERJOUMA, R.; MOUCHTACHI, A.; JAYET, Y. y BABOUX, J.C. (1992). «Non destructive evaluation of graphite by ultrasonic velocity measurement using cross-correlation and Hilbert transform methods». *IEEE Ultrasonic Symposium Proceedings*, pp. 829–832.
- HAÏAT, G.; LHÉMERY, A.; RENAUD, F.; PADILLA, F.; LAUGIER, P. y NAILI, S. (2008). «Velocity dispersion in trabecular bone: Influence of multiple scattering and of absorption». *Journal of the Acoustical Society of America*, **124(6)**, pp. 4047–4058.
- HASHIN, Z. y SHTRIKMAN, S. (1962). «On some variational principles in anisotropic and nonhomogeneous elasticity». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **10(4)**, pp. 335–342.
- (1963). «A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **11(2)**, pp. 127–140.
- HE, P. y ZHENG, J. (2001). «Acoustic dispersion and attenuation measurement using both transmitted and reflected pulses». *Ultrasonics*, **39**, pp. 27–32.
- HERNÁNDEZ, M.G (2002). *Aplicación de la micromécanica a la caracterización ultrasónica de compuestos de cemento*. Tesis doctoral, ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid.
- HERNÁNDEZ, M.G.; ANAYA, J.J.; IZQUIERDO, M.A.G. y ULLATE, L.G. (2006a). «Application of a micromechanical model of three phases to estimating the porosity of mortar by ultrasound». *Cement and Concrete Research*, **36(4)**, pp. 617–624.
- HERNÁNDEZ, M.G.; ANAYA, J.J.; ULLATE, L.G. y IBAÑEZ, A. (2004). «Effect of the fluid in the inclusions of cement paste on the ultrasonic velocity». *Ultrasonics*, **42(1-9)**, pp. 865–869.
- HERNÁNDEZ, M.G.; ANAYA, J.J.; ULLATE, L.G. y IBAÑEZ, A. (2006b). «Formulation of a new micromechanic model of three phases for ultrasonic characterization of cement-based ma-

- terials». *Cement and Concrete Research*, **36**(4), pp. 609–616.
- HILL, R. (1952). «The Elastic Behaviour of a Crystalline Aggregate». *Proceedings of the Physical Society. Section A*, **65**(5), pp. 349–354.
- (1963). «Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **11**(5), pp. 357–372.
- (1965). «A self-consistent mechanics of composite materials». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **13**(4), pp. 213–222.
- HIRSCH, T.J. (1962). «Modulus of elasticity of concrete affected by elastic moduli of cement paste matrix and aggregate». *Proceedings of the American Concrete Institute*, **59**, pp. 427–451.
- IZQUIERDO, M.A.G. (2000). *Mejora de la relación señal ruido en inspecciones ultrasónicas de materiales altamente dispersivos*. Tesis doctoral, E.T.S.I. de Telecomunicación. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España.
- IZQUIERDO, M.A.G.; HERNÁNDEZ, M.G.; GRAULLERA, O. y ANAYA, J.J. (2000). «Signal-to-noise ratio enhancement based on the whitening transformation of colored structural noise». *Ultrasonics*, **38**, pp. 500–502.
- IZQUIERDO, M.A.G.; HERNÁNDEZ, M.G.; GRAULLERA, O. y ULLATE, L.G. (2002). «Time-frequency wiener filtering for structural noise reduction». *Ultrasonics*, **40**, pp. 259–261.
- IZQUIERDO, M.A.G.; HERNÁNDEZ, M.G.; MOLERO, M. y ANAYA, J.J. (2007). «On the use of the non-stationary of the structural noise for defect visibility enhancement in ultrasonic inspections». En: *19<sup>th</sup> International Congress on Acoustics*, Madrid, Spain.
- JU, J.W.; WENG, L-S. y LIU, Y. (2006). «Ultrasonic frequency-dependent amplitude attenuation characteristics technique for nondestructive evaluation of concrete». *ACI Materials Journals*, **103**(3), pp. 177–185.
- KERR, F.H. (1992a). «An effective medium approach to the study of plane wave propagation in an elastic matrix with spherical inclusions». *International Journal of Engineering Science*, **30**(2), pp. 187–199.
- (1992b). «The scattering of a plane elastic wave by spherical elastic inclusions». *International Journal of Engineering Science*, **30**(2), pp. 169–186.
- KEWALRAMANI, M. y GUPTA, R. (2006). «Concrete compressive strength prediction using ultrasonic pulse velocity through artificial neuronal networks». *Automation in Construction*, **15**(3), pp. 374–379.
- KIM, J.-Y. (2003). «Extinction of elastic wave energy due to scattering in a viscoelastic medium». *International Journal of Solids and Structures*, **40**(17), pp. 4319–4329.
- (2005). «Discussion: “Boundary element analysis of multiple scattering waves in high



- performances concrete” (Sato, Hirotaka, Kitahara, Michihiro, and Shoji, Tetsuo, 2005, ASME J. Appl. Mech 72, pp. 165-171)». *Journal of Applied Mechanics*, **72(6)**, p. 986.
- KIM, J.-Y.; IH, J.-G. y LEE, B.-H. (1995). «Dispersion of elastic waves in random particulate composites». *Journal of the Acoustical Society of America*, **97(3)**, pp. 1380–1388.
- KIM, J.Y. (2004). «On the generalized self-consistent model for the elastic wave propagation in composite materials». *International Journal of Solids and Structures*, **41(16-17)**, pp. 4349–4360.
- KRAU, M. y HARIRI, K. (2006). «Determination of initial degree of hydration for improvement of early-age properties of concrete using ultrasonic wave propagation». *Cement & Concrete Composites*, **28(4)**, pp. 299–306.
- KUSTER, G.T. y TOKSÖZ, N. (1974). «Velocity and attenuation of seismic waves in two-phase media: Part I. Theoretical formulations». *Geophysics*, **39(5)**, pp. 583–606.
- LAFHAJ, Z. y GOUYGOU, M. (2009). «Experimental study on sound and damaged mortar: Variation of ultrasonic parameters with porosity». *Construction and Building Materials*, **23(2)**, pp. 953–958.
- LAX, M. (1951). «Multiple Scattering of Waves». *Reviews of Modern Physics*, **23(4)**, pp. 287–310.
- (1952). «Multiple Scattering of Waves II. The effective field in dense systems». *Physical Review*, **85(4)**, pp. 621–628.
- LAYMAN, C.; SANJEEVA MURTHY, R.B., C. YANG y WU, J. (2006). «The interaction of ultrasound with particulate composites». *Journal of the Acoustical Society of America*, **119(3)**, pp. 1449–1456.
- LEE, H.K.; LEE, K.M.; KIM, Y.H.; YIM, H. y BAE, D.B. (2004). «Ultrasonic in-situ monitoring of setting process of high-performance concrete». *Cement and Concrete Research*, **34(4)**, pp. 631–640.
- LEE, S.C. (2003). «Prediction of concrete strength using artificial neural networks». *Engineering Structures*, **25(7)**, pp. 849–857.
- LLOYD, P. y BERRY, M.V. (1967). «Wave propagation through an assembly of spheres IV: Relations between different multiple scattering theories». *Proceedings of the Physical Society of London*, **91(3)**, pp. 678–688.
- MASON, W.P. y MCSKIMIN, H.J. (1947). «Attenuation and Scattering of high frequency sound waves in metals and glasses». *Journal of the Acoustical Society of America*, **19(3)**, pp. 464–473.
- MCCLEMENTS, D.J. (1996). «Principles of ultrasonic droplets size determination in emulsions». *Langmuir*, **12(14)**, pp. 3454–3561.

- (2000). «Ultrasonic Measurements in Particle Size Analysis». En: R.A. Meyers (Ed.), *Encyclopedia of Analytical Chemistry*, John Wiley & Sons Ltd..
- MEHTA, P.K. y MONTEIRO, P.J.M (2006). *Concrete. Microstructure, Properties, and Materials*. McGraw-Hill, tercera edición.
- MINDESS, S.; YOUNG, J.F. y DARWIN, D. (2002). *Concrete*. Prentice Hall, second edition edición.
- MIRALLES, R.; VERGARA, L. y GOSÁLBEZ, J. (2004). «Material grain noise analysis by using higher-order statistics». *Signal Processing*, **84(1)**, pp. 197–205.
- MOLERO, M.; HERNÁNDEZ, M.G.; ANAYA, J.J y SÁNCHEZ, T. (2007). «Flaw detection on highly scattering material using multiresolution analysis with time-frequency thresholding». En: *19<sup>th</sup> International Congress on Acoustics*, Madrid, Spain.
- MOLERO, M.; SEGURA, I.; IZQUIERDO, M.A.G.; FUENTE, J.V. y ANAYA, J.J. (2009). «Sand/Cement ratio evaluation on mortar using neural network and ultrasonic transmission inspection». *Ultrasonics*, **49(2)**, pp. 231–237.
- MORSE, P.M. y FESHBACH, H. (1953). *Methods of Theoretical Physics*. volumen II. McGraw-Hill College.
- NI, H.G. y WANG, J.Z. (2000). «Prediction of compressive strength of concrete by neural networks». *Cement and Concrete Research*, **30(8)**, pp. 1245–1250.
- NORRIS, A.N. (1986). «Scattering of elastic waves by spherical inclusions with applications to low frequency wave propagation in composites». *International Journal of Engineering Science*, **24(8)**, pp. 1271–1282.
- PANAMETRICS, INC. (2006). «Ultrasonic transducers technical notes». <http://www.olympus-ims.com/data/File/panametrics/UT-technotes.en.pdf>.
- PAO, Y.H. y MOW, C.C. (1963). «Scattering of plane compressional wave by a spherical obstacle». *Journal of Applied Physics*, **34(3)**, pp. 493–499.
- PARNELL, W.J. (2006). *Homogenization techniques for wave propagation in composite materials*. Tesis doctoral, University of Manchester.
- PARRILLA, M.; ANAYA, J.J. y FRITSCH, C. (1991). «Digital signal processing techniques of high accuracy ultrasonic range measurements». *IEEE Transactions on Instrumentations and Measurement*, **40(4)**, pp. 759–763.
- PHILIPPIDIS, T.P. y AGGELIS, D.G. (2005). «Experimental study of wave dispersion and attenuation in concrete». *Ultrasonics*, **43(7)**, pp. 584–595.
- POPOVICS, S.; ROSE, J.L. y POPOVICS, J.S. (1990). «The behavior of ultrasonic pulse in concrete». *Cement and Concrete Research*, **20(2)**, pp. 259–270.
- PUNURAI, W.; JARZYNSKI, J.; QU, J.; KIM, J.-Y.; JACOBS, L.J. y KURTIS, K.E. (2007). «Char-

- acterization of multi-scale porosity in cement paste by advanced ultrasonic techniques». *Cement and Concrete Research*, **37(1)**, pp. 38–46.
- PUNURAI, W.; JARZYNSKI, J.; QU, J.; KURTIS, K.E. y JACOBS, L.J. (2006). «Characterization of entrained air voids in cement paste with scattered ultrasound». *NDT&E International*, **39(6)**, pp. 514–524.
- REUSS, A. (1929). «Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle». *ZAMM- Journal of Applied Mathematics and Mechanics (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik)*, **9(1)**, pp. 49–58.
- REYNOLDS, W.N. y SMITH, R.L. (1984). «Ultrasonic wave attenuation spectra in steels». *Journal of Physics D: Applied Physics*, **17(1)**, pp. 109–116.
- RILEM (1984). «TC 14-CPC CPC 11.3, Absorption of water by immersion under vacuum». *Materials and Structures*, **17**, pp. 391–394.
- ROBEYST, N.; GRUYAERT, E.; GROSSE, C.U. y DE BELIE, N. (2008). «Monitoring the setting of concrete containing blast-furnace slag by measuring the ultrasonic p-wave velocity». *Cement and Concrete Research*, **38(10)**, pp. 1169–1176.
- ROGERS, P.H. y VAN-BUREN, A.L. (1974). «An exact expression for the Lommel diffraction correction integral». *Journal of Acoustic Society of America*, **55(4)**, pp. 724–728.
- SABINA, F.J. y WILLIS, J.R. (1988). «A simple self consistent analysis of wave propagation in particulate composites». *Wave Motion*, **10(2)**, pp. 127–142.
- SADD, M.H. (2005). *Elasticity. Theory, Applications, and Numerics*. Elsevier.
- SANIIE, J. y BILGUTAY, N. (1986). «Quantitative grain size evaluation using ultrasonic backscattered echoes». *Journal of Acoustic Society of America*, **80(6)**, pp. 1816–1824.
- SANIIE, J.; WANG, T. y BILGUTAY, N. (1988). «Statistical evaluation of backscattered ultrasonic grain signals». *Journal of Acoustic Society of America*, **84(1)**, pp. 400–408.
- SATO, H.; KITAHARA, M. y SHOJI, T. (2005). «Boundary element analysis of multiple scattering waves in high performance concretes». *Journal of Applied Mechanics*, **72(2)**, pp. 165–171.
- SATO, H. y SHINDO, Y. (2003). «Multiple scattering of plane elastic waves in a particle-reinforced-composite medium with graded interfacial layers». *Mechanics of Materials*, **35(1-2)**, pp. 83–106.
- SAYERS, C.M. (1980). «On the propagation of ultrasound in highly concentrated mixtures and suspensions». *Journal of Physics D: Applied Physics*, **13(2)**, pp. 179–184.
- SAYERS, C.M. y SMITH, R.L. (1982). «The propagation of ultrasound in porous media». *Ultrasonics*, **20(5)**, pp. 201–205.
- SEGURA, I. (2008). *Caracterización del proceso de descalcificación en morteros, mediante en-*



- sayos destructivos y no destructivos. Tesis doctoral, E:T.S.I. de Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Madrid, Madrid, España.
- SEKI, H.; GRANATO, A. y TRUELL, R. (1956). «Diffraction effects in the ultrasonic field of a piston source and their importance in the accurate measurement of attenuation». *Journal of the Acoustical Society of America*, **28(2)**, pp. 230–238.
- SHINDO, Y.; NOZAKI, H. y DATTA, S.K. (1995). «Effect of interface layers on elastic wave propagation in a metal matrix composite reinforced by particles». *Journal of Applied Mechanics*, **62(1)**, pp. 178–185.
- SHIOTANI, T. y AGGELIS, D.G. (2009). «Wave propagation in cementitious material containing artificial distributed damage». *Material and Structures*, **42(3)**, pp. 377–384.
- SHIOTANI, T.; MOMOKI, S.; CHAI, H. y AGGELIS, D. (2009). «Elastic wave validation of large concrete structures repaired by means of cement grouting». *Construction and Building Materials*, **23(7)**, pp. 2647–2652.
- SMITH, R.L. (1987). «Ultrasonic materials characterization». *NDT International*, **20(1)**, pp. 43–48.
- STANKE, F.E. y KINO, G.S. (1984). «A unified theory for elastic wave propagation in polycrystalline materials». *Journal of the Acoustical Society of America*, **75(3)**, pp. 665–681.
- THARMARATNAM, K y TAN, B. S. (1990). «Attenuation of ultrasonic pulse in cement mortar». *Cement and Concrete Research*, **20(3)**, pp. 335–345.
- TIMOSHENKO, S. y GOODIER, J. (1951). *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill.
- TOBIO, J.M. (1967). *Ensayos no destructivos, Métodos aplicables a la construcción*. Instituto Eduardo Torroja de la construcción y del cemento, Madrid, España.
- TSINOPOULOS, S.V.; VERBIS, J.T. y POLYZOS, D. (2000). «An Iterative Medium Approximation for Wave Dispersion and Attenuation Predictions in Particulate Composites». *Advanced Composites Letters*, **9(3)**, pp. 193–200.
- TWERSKY, V. (1962a). «On scattering of waves by random distributions. I. Free-space scatterer formalism». *Journal of Mathematical Physics*, **3(4)**, pp. 724–734.
- (1962b). «On scattering of waves by random distributions. II. Two-space scatterer formalism». *Journal of Mathematical Physics*, **3(4)**, pp. 724–734.
- VERBIS, J.T.; KATTIS, S.E.; TSINOPOULOS, S.V. y POLYZOS, D. (2001). «Wave dispersion and attenuation in fiber composites». *Computational Mechanics*, **27(3)**, pp. 244–252.
- VERGARA, L.; FUENTE, J.V.; GOSÁLBEZ, J.; MIRALLES, R. y BOSCH, I. (2003). «Processing of ultrasonic grain noise signals for the estimation of depth- and frequency- dependent attenuation». *Measurement Science & Technology*, **14(7)**, pp. 1018–1024.
- VERGARA, L.; GOSÁLBEZ, J.; FUENTE, J.V.; MIRALLES, R. y BOSCH, I. (2004a). «Measure-

- ment of cement porosity by centroid frequency profiles of ultrasonic grain noise». *Signal Processing*, **84**(12), pp. 2315–2324.
- VERGARA, L.; GOSÁLBEZ, J.; MIRALLES, R. y BOSCH, I. (2004b). «On estimating the center frequency of ultrasonic pulses». *Ultrasonics*, **42**(1-9), pp. 813–818.
- VOIGT, W. (1928). *Lehrbuch der Kristallphysik*. Teubner-Verlag Berlin-Leipzig.
- WALPOLE, L.J. (1969). «On the overall elastic moduli of composite materials». *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **17**(4), pp. 235–251.
- WATERMAN, P. C. y TRUELL, R. (1961). «Multiple scattering of waves». *Journal of Mathematical Physics*, **2**(4), pp. 512–537.
- WATT, J. P. (1976). «The elastic properties of composite materials». *Reviews of geophysics and space physics*, **14**(4), pp. 541–563.
- WEI, P.J. y HUANG, Z.P. (2004). «Dynamic effective properties of the particle-reinforced composites with the viscoelastic interphase». *International Journal of Solids and Structures*, **41**(24-25), pp. 6993–7007.
- WEIBEL, E.R. y ELIAS, H. (1967). *Quantitative Methods in Morphology*. Springer Berlin/Heidenlberg.
- WU, J.; LAYMAN, C.; MURTHY, S. y YANG, R.-B. (2006). «Determine mechanical properties of particulate composite using ultrasound spectroscopy». *Ultrasonics*, **44**(Suppl.1), pp. e793–e800.
- XU, W. (1993). «Diffraction correction methods for insertion ultrasound attenuation estimation». *IEEE Transaction on Biomedical Engineering*, **40**(6), pp. 563–570.
- YAMAN, I.O.; AKTAN, H.M. y HEARN, N. (2002). «Active and non-active porosity in concrete part II: Evaluation of existing models». *Materials and Structures*, **35**, pp. 110–116.
- YANG, R.-B. (2003). «A dynamic generalized self-consistent model for wave propagation in particulate composites». *Journal of Applied Mechanics*, **70**(4), pp. 575–582.
- YANG, R.-B. y MAL, A.K. (1994). «Multiple scattering of elastic waves in a fiber-reinforced composite». *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, **42**(12), pp. 1945–1968.
- YEH, I. (1998). «Modeling of strength of high-performance concrete using artificial neural networks». *Cement and Concret Research*, **28**(12), pp. 1797–1808.
- YING, C. F. y TRUELL, R. (1956). «Scattering of a plane longitudinal wave by a spherical obstacle in an isotropically elastic solid». *Journal of Applied Physics*, **27**(9), pp. 1086–1097.